В. А. Гусев
А. И. Медяник

ГЕОМЕТРИЯ

8

Дидактические материалы

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

В. А. Гусев А. И. Медяник

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

8 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

11-е издание

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2017

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г96

6+

Рецензенты:

учитель математики средней школы № 510 Москвы, заслуженный учитель РФ *Н. П. Адамская*; учитель математики школы-гимназии № 1567 Москвы, заслуженный учитель РФ *Л. И. Звавич*; учитель математики средней школы № 1741 Москвы *И. Е. Феоктистов*

Гусев В. А.

Г96 Геометрия. Дидактические материалы. 8 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. А. Гусев, А. И. Медяник.— 11-е изд.— М. : Просвещение, 2017.— 96 с. : ил.— ISBN 978-5-09-046401-7.

Данное пособие относится к учебно-методическому комплекту А. В. Погорелова по геометрии для 7—9 классов. Пособие содержит самостоятельные работы, дифференцированные задания и дополнительные задачи по геометрии для VIII класса средней школы. Ко всем заданиям приводятся ответы, к большинству — указания к решению.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Учебное издание

Гусев Валерий Александрович
Медяник Анатолий Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*, редакторы *Т. А. Бурмистрова*, *Т. Ю. Акимова*, *И. В. Рекман*, художник *Е. В. Анненко*, художественный редактор *О. П. Богомолова*, технический редактор *Н. Н. Бажанова*, корректор *Л. С. Вайтман*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 04.08.16. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,48. Доп. тираж 1500 экз. Заказ № 39772.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, г. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в АО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 978-5-09-046401-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит дополнительный задачный материал по курсу геометрии VIII класса. Оно ориентировано на учебник А. В. Погорелова «Геометрия, 7—9» (М.: Просвещение, 2000.— 224 с.).

Пособие включает самостоятельные работы, составленные как к основным пунктам учебника геометрии, так и ко всем его параграфам, дифференцированные задания по основным разделам курса и систему дополнительных задач к каждому параграфу учебника, контрольные работы.

Основной целью пособия является помощь учителю в организации самостоятельной работы и контроля знаний учащихся на уроках и вне их. Задания составлены с учетом выделения главных и наиболее важных разделов курса. Самостоятельные работы предназначены для обучения восьмиклассников самостоятельному решению задач по только что изученному материалу, способствуют его повторению и закреплению. Задачи, помещенные в работах, могут быть также использованы как индивидуальные задания при опросе и в качестве домашних заданий. Многие из предлагаемых заданий помогают отрабатывать практические умения и навыки учащихся, однако учителю каждый раз следует внимательно следить за обоснованностью и четкостью выводов.

Достаточно полное представление о содержании той или иной самостоятельной работы дает следующее распределение их по темам и параграфам:

С-1. Параллелограмм и его свойства.

С-2. Прямоугольник. Ромб.

С-3. Теорема Фалеса.

С-4. Трапеция.

С-5. Четырехугольники (§ 6).

С-6[1]. Косинус угла.

С-7. Теорема Пифагора.

С-8. Перпендикуляр и наклонная. Неравенство треугольника.

С-9. Решение прямоугольных треугольников.

С-10. Значение синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°.

С-11. Теорема Пифагора (§ 7).

[1] Эта самостоятельная работа проводится перед изучением теоремы 7.1.

С-12. Введение координат на плоскости. Координаты середины отрезка.

С-13. Расстояние между точками. Уравнения окружности и прямой.

С-14. Расположение прямой относительно системы координат. Пересечение прямой и окружности.

С-15. Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0 до 180°.

С-16. Декартовы координаты на плоскости (§ 8).

С-17. Симметрия относительно точки.

С-18. Симметрия относительно прямой.

С-19. Параллельный перенос и его свойства.

С-20. Движение (§ 9).

С-21. Координаты вектора. Сложение векторов.

С-22. Умножение вектора на число. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

С-23. Скалярное произведение векторов.

С-24. Векторы (§ 10).

Каждая самостоятельная работа рассчитана на 10—15 мин. С целью учета индивидуальных особенностей школьников самостоятельные работы даются в четырех вариантах, причем первый из них самый простой, а четвертый — наиболее сложный. Второй и третий варианты имеют промежуточную сложность и являются примерно равноценными, что позволяет использовать их одновременно. В случае необходимости можно использовать одновременно и работы разной сложности, включая и наиболее простую. Но это вовсе не предполагает постоянного деления класса на слабых, средних и сильных учащихся. Такое деление является весьма условным и должно рассматриваться как временное.

При проведении каждой самостоятельной работы варианты должны быть распределены так, чтобы могли развиваться способности всех без исключения учащихся. Критерий такого распределения сводится к тому, чтобы для каждого ученика работа была посильна, т. е. реально выполнима, но требовала напряжения и усилий для ее выполнения.

Учитель во время выполнения учащимися самостоятельной работы может консультировать учеников. Самостоятельные работы носят, как правило, обучающий характер. Поэтому учитель в зависимости от поставленной им цели и от подготовки учащихся может предложить для решения в классе лишь часть из заданий той или иной самостоятельной работы.

Если в условии задачи не говорится, при помощи каких инструментов следует выполнять построение, то ученик может воспользоваться любым из инструментов: линейкой, циркулем, угольником, транспортиром.

Время, необходимое для выполнения заданий самостоятельных работ, существенно зависит от требований к оформлению решения задач и набора инструментов, с помощью которых выполняются построения. Поэтому нужно четко указывать эти требования.

При выполнении заданий на построение от учащихся не всегда следует требовать описания построений. При решении задач на вычисление и доказательство учащиеся должны кратко записать решение.

Оценка работы проводится учителем с учетом самостоятельности ее выполнения. Если самостоятельная работа носила обучающий характер, то неудовлетворительные оценки, как правило, не выставляются.

Особое место в системе самостоятельных работ занимают самостоятельные работы к параграфам, которые помогают осуществить контроль усвоения всего материала параграфа. На выполнение этих работ требуется 15—20 мин, и они могут рассматриваться как подготовительные к выполнению контрольных работ. Учитель по своему усмотрению может использовать задания, помещенные в этих работах, при составлении контрольных работ.

Дифференцированные задания являются естественным продолжением и развитием самостоятельных работ. Но если разделение на варианты при составлении и проведении самостоятельных работ сопряжено с трудностями учета индивидуальных особенностей учащихся, то дифференцированные задания учитывают их автоматически. В то же время дифференцированные задания предполагают более высокий уровень развития учащихся, так как направлены на развитие у них логического мышления.

Цель дифференцированных заданий состоит не только в том, чтобы способствовать развитию логического мышления школьников, но и в том, чтобы контролировать уровень такого развития, что очень важно для всего учебного процесса. Структура заданий позволяет выявить учащихся, склонных к дедуктивному мышлению, способствует дальнейшему их развитию. Такие задания приучают к последовательности в мышлении, к его четкости и точности. Имеются дифференцированные задания в основном двух типов. В заданиях Д-3, Д-5, Д-6, Д-8, Д-9, Д-11, Д-12, Д-13 требуется доказать по четыре утверждения. Первое утверждение самое простое, а четвертое — наиболее сложное (оно предназначено только для сильных учащихся). Доказательство каждого последующего утверждения опирается на предыдущие. Кроме того, в отдельных случаях ученикам даются по ходу выполнения задания и другие указания. В заданиях Д-1, Д-2, Д-7, Д-10, Д-14, Д-15 предлагается найти по два существенно различных доказательства одного и того же утверждения (сильные учащиеся могут найти больше таких доказательств). Если первый тип дифференцированных заданий можно квалифицировать как обучающие умению аргументировать, доказывать, то задания второго типа являются творческими, так как в них учащимся надо найти идею и схему доказательства, двух доказательств (в задании первого типа схема доказательства последующих утверждений определяется структурой самого задания).

Возможны различные организационные формы выполнения дифференцированных заданий: классная или домашняя работа, классно-домашняя работа. При выборе формы проведения следует иметь в виду, что дифференцированные задания не должны подменять программный материал. Они являются лишь дополнениями к нему.

Раздел дополнительных задач развивает систему задач, имеющихся в учебнике А. В. Погорелова. Эти задачи распределены по параграфам. Они могут быть предложены для самостоятельной работы учащихся, успешно справляющихся с задачами, помещенными в учебнике. Кроме этого, данная система задач может быть рекомендована для проведения кружковых занятий и при организации факультативов. Наиболее сложные задачи отмечены звездочкой (*).

В этом издании помещены контрольные работы. Сформулируем требования, которыми мы руководствовались при составлении этих контрольных работ.

1. В каждой контрольной работе выделена та часть, которая проверяет обязательные результаты обучения. В связи с этим учитель должен ясно представлять себе тот материал, который считается этим обязательным уровнем (для каждой контрольной работы он определен, но здесь не должно быть категоричности, так как учитель в зависимости от местных условий может этот уровень изменять).

2. Задачи, проверяющие обязательный уровень обучения, составлены так, чтобы после их выполнения учащимися учитель мог видеть, какими исходными знаниями ученик не обладает, какими приемами он не владеет. В предложенных контрольных работах такие задания отмечены кружочком (°).

3. Все варианты контрольных работ рассчитаны на их одновременное использование.

Важно, чтобы учитель понимал, каков уровень требований к задачам, включенным в контрольную работу, за выполнение которых может быть поставлена оценка «хорошо» или «отлично».

К-1. Четырехугольники. Достаточно сложно выделить по данной теме материал на уровне обязательных результатов обучения, тем более что авторы учебных пособий формулируют признаки четырехугольников не по их значению в решении широкого круга задач, а по необходимости построения теоретического материала учебного пособия. Тем не менее мы выделяем в качестве такого обязательного материала два основных звена (включая их пересечения и взаимосвязи):

а) непосредственное использование определений четырехугольников;

б) непосредственное использование основных (выделенных в учебнике) признаков соответствующих четырехугольников.

В этой контрольной работе мы приводим варианты, которые содержат задачи, относящиеся к одному виду четырехугольников, а также варианты, содержащие задания, относящиеся к разным видам четырехугольников. Учитель сам может определить наиболее приемлемый для себя вид вариантов контрольных работ, естественно, что можно переставлять задания в разных вариантах.

Для более дифференцированного подхода к оценке знаний и способностей учащихся мы предлагаем дополнительное задание. Дело в том, что нельзя приучать учащихся к легкому получению отличной оценки. Учитель может снять это задание, если оценку за контрольную работу он рассматривает как некоторое зачетное мероприятие.

К-2. Теорема Фалеса, средняя линия треугольника, средняя линия трапеции. Формально в содержание этой контрольной работы входит, кроме перечисленных в заглавии пунктов, еще и понятие трапеции (отметим, что в учебнике А. В. Погорелова к свойствам трапеции можно отнести только теорему 6.8 о средней линии трапеции).

Выделяя знания, составляющие обязательный уровень обучения, можно выделить следующие моменты:

а) непосредственное использование определения трапеции;

б) непосредственное применение теорем о средних линиях треугольника и трапеции.

Здесь мы также предлагаем дополнительное задание, однако учитель может его снять.

К-3. Теорема Пифагора. Очень трудно вообще составить контрольную работу по материалу данного раздела (объем материала весьма обширен), еще сложнее определить материал, который следует отнести к обязательному для усвоения всеми учащимися. Тем не менее к таким знаниям мы относим:

а) знание определений синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника;

б) непосредственное использование теоремы Пифагора.

К-4. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Эта тема очень важна, в частности, для применения геометрических знаний при изучении смежных дисциплин, например при изучении физики. В связи с этим на уровне обязательных результатов обучения мы проверяем владение учащимися основными соотношениями между элементами в прямоугольном треугольнике, а в других заданиях проверяем использование этих соотношений в несколько измененных и нестандартных ситуациях.

К-5. Декартовы координаты на плоскости. Эта тема весьма обширна, при этом совершенно ясно, что серьезное и полное изучение этой темы возможно лишь при углубленном изучении математики в школе. В связи с этим возникает несколько уровней для возможности изучения этой темы, а следовательно, и разные подходы к выделению материала, относимого к обязательным результатам обучения. Можно, например, считать, что обязательными являются лишь два основных умения: находить координаты точки на координатной плоскости и по координатам строить соответствующую точку. Мы решили принять более высокий уровень планируемых обязательных результатов обучения:

а) умение находить координаты середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка;

б) умение находить длину отрезка по соответствующей формуле;

в) умение составить уравнение окружности по известным координатам центра и радиусу.

К-6. Движение. Материал этого раздела курса геометрии также может рассматриваться на разных уровнях. Число часов, отводимых программой для изучения этой темы всеми учащимися, не позволяет изучить ее достаточно подробно. Эта тема (как предыдущая и последующая) на базовом уровне обучения только вводит учащихся в данные серьезные вопросы геометрии, основное знакомство учащихся с этими разделами может проходить при различных формах дифференцированного обучения математике в средней школе. Вот почему в качестве обязательных результатов обучения можно назвать лишь наиболее простые вопросы, такие, как:

а) представления о движении и о связи его с понятием равенства фигур;

б) построение фигур, симметричных данным, при осевой и центральной симметриях.

К-7. Векторы. К планируемым результатам обучения здесь можно отнести следующие вопросы:

а) владение понятием вектора и задание вектора его координатами (нахождение длины вектора, построение вектора, равного данному);

б) операции над векторами, выполняемые для конкретно заданных векторов (одни учителя могут рассматривать эти операции в координатах, а другие — в геометрической форме; представляется, что второе предпочтительнее, хотя хронология изучения этого материала в учебнике затрудняет геометрическое видение операций).

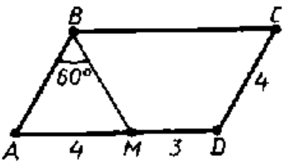
К-8. Итоговая (годовая) **контрольная работа.** Включает в себя обязательный материал всех разделов курса геометрии 8 класса: четырехугольники (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция), теорема Пифагора, значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°, координаты середины отрезка и расстояние между двумя точками, скалярное произведение векторов и условие их перпендикулярности.

В конце пособия приводятся ответы и указания ко всем самостоятельным работам и дифференцированным заданиям и даются методические рекомендации к ним. Там же даются и ответы к контрольным работам.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1



1. Дан параллелограмм (см. рис.). Вычислите его периметр и углы.

2. Постройте параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и углом 50° между ними.

С-2

1. Периметр прямоугольника равен 48 см. Найдите его стороны, если они относятся как 1 : 2.

2. Диагональ ромба образует с одной из его сторон угол 40°. Найдите углы ромба.

С-3

1. Начертите произвольный отрезок *AB* и разделите его на две равные части.

2. Стороны треугольника равны 4 см, 6 см и 8 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

С-4

1. Углы при основании трапеции равны 46° и 72°. Найдите остальные углы трапеции.

2. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от прямой, удалены от нее на расстояния 6 см и 10 см. На каком расстоянии от этой прямой находится середина этого отрезка?

С-5

1. Один из углов параллелограмма в 3 раза больше другого его угла. Найдите все углы параллелограмма.

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является параллелограммом.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 4 равные части, и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Чему равны длины этих отрезков, если основание треугольника равно 8 см?

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник с прямым углом C и углом A, равным 60°. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Постройте прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 и углом A_1, равным 60°. Вычислите отношение A_1C_1 к A_1B_1 и сравните его с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Стороны прямоугольника 8 см и 15 см. Найдите его диагональ.

2. В равнобокой трапеции основания равны 8 см и 14 см, боковая сторона — 5 см. Найдите высоту трапеции.

С-8

1. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC опущена высота CD. Какой из его катетов больше другого, если $BD > AD$?

2. Расстояние от дома до школы 1 км, а от дома до станции 1,5 км. Может ли расстояние от школы до станции равняться 3 км?

С-9

1. Диагонали ромба равны 14 см и 48 см. Найдите его периметр.

2. Найдите гипотенузу c, катет b и угол α прямоугольного треугольника по катету $a=8$ см и прилежащему углу $\beta=25°$.

С-10

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) $AB=1$ см, $\angle A=30°$. Найдите катеты треугольника.

2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 3 см. Чему равны катеты этого треугольника?

С-11

1. Докажите, что диагональ прямоугольника больше любой его стороны.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $AD=\frac{16}{5}$ см, $AC=4$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC.

3. Найдите катеты и второй острый угол прямоугольного треугольника по гипотенузе $c=13$ см и острому углу $\alpha=35°$.

С-12

1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на них и постройте точки $A(3;\,-1)$, $B(-2;\,4)$, $C(1;\,1)$, $D(-3;\,-2)$.

2. Найдите координаты середины отрезка с концами в точках $(3;\,-1)$ и $(-2;\,-2)$.

С-13

1. Найдите длину диаметра окружности, если его концами являются точки $(3;\,4)$ и $(2;\,-1)$.

2. Найдите координаты точек пересечения окружности $(x-4)^2+y^2=25$ с осью y.

С-14

1. Запишите уравнение прямой, параллельной оси y и проходящей через точку $(-1; 2)$.

2. Расстояние от центра окружности, заданной уравнением $(x-1)^2+(y+2)^2=36$, до прямой a равно 6. Что можно сказать о взаимном расположении прямой a и данной окружности?

С-15

1. Чему равен синус углов 120°, 135°, 150°?

2. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $90°<\alpha<180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; 1)$ проведена медиана AD. Найдите длину этой медианы и составьте уравнение прямой, содержащей эту медиану.

2. Используя геометрические соображения, составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и точки $(6; 0)$ и $(0; 8)$.

3. Докажите, что синусы смежных углов равны.

С-17

1. Даны точки A и B. Постройте точку C, симметричную точке B относительно точки A.

2. Даны отрезок CD и точка A, не лежащая на прямой CD. Постройте фигуру, симметричную отрезку CD относительно точки A.

С-18

1. Даны прямая a и точка B. Постройте точку C, симметричную точке B относительно прямой a.

2. Сколько осей симметрии имеет луч?

С-19

1. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 2$, $y' = y - 2$. В какие точки при этом параллельном переносе перейдут точки (1; 1), (−1; 1)?

2. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, при котором точка (0; 1) переходит в точку (1; 2).

С-20

1. При симметрии относительно середины стороны AC треугольника ABC вершина B переходит в точку D. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте фигуру, в которую он переходит при симметрии относительно прямой AD.

3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка (3; 1) переходит в точку (1; 3), а точка (2; 0) — в точку (0; 2)?

С-21

1. Даны вектор $\overline{AB}$ и точка C. Отложите от точки C вектор, равный вектору $\overline{AB}$.

2. Даны векторы $\overline{a}(1; 0)$ и $\overline{b}(1; 2)$. Найдите векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overline{CA}$ и $\overline{DB}$ через векторы $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$.

С-22

1. Дан вектор $\overline{a}\left(1; \frac{4}{3}\right)$. Найдите абсолютную величину вектора $3\overline{a}$.

2. Даны векторы $\overline{c}(-1; 0)$ и $\overline{a}(1; 2)$. Найдите вектор $2\overline{c} + 3\overline{a}$.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Разложите вектор $\overline{AO}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

С-23

1. Найдите косинус угла между векторами $\overline{c}(1;\ 1)$ и $\overline{d}\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. Даны векторы $\overline{a}(-2;\ 3)$ и $\overline{b}(2;\ n)$. При каком значении n эти векторы перпендикулярны?

С-24

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите сумму векторов: а) $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$; в) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

2. Найдите угол A треугольника ABC, если $A(0;\ 1)$, $B(\sqrt{3};\ 0)$, $C(0;\ 3)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 2

С-1

1. Вычислите углы параллелограмма, если его углы, прилежащие к одной стороне, относятся как 2 : 3.

2. Постройте параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см и диагональю 5 см.

С-2

1. Периметр прямоугольника равен 96 см. Найдите его стороны, если они относятся как 1 : 3.

2. Один из углов, которые образует сторона ромба с его диагоналями, больше другого на 20°. Найдите углы ромба.

С-3

1. Начертите произвольный отрезок BC и разделите его на 5 равных частей.

2. Периметр треугольника равен 6,7 см. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от него одной из его средних линий.

С-4

1. В равнобокой трапеции диагональ образует с основанием угол 30°. Найдите углы трапеции, если известно, что меньшее основание трапеции равно ее боковой стороне.

2. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагональ BD делит среднюю линию трапеции на отрезки 6 см и 12 см. Найдите основания этой трапеции.

С-5

1. Один из углов параллелограмма в 2 раза меньше другого его угла. Найдите все углы параллелограмма.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является ромбом.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 4 равные части, и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Наименьший из этих отрезков равен 3 см. Чему равно основание треугольника и остальные два отрезка?

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Постройте прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 и углом A_1, равным углу A треугольника ABC. Вычислите отношение A_1C_1 к A_1B_1 и сравните его с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна 9 см, а диагональ — 15 см.

2. В окружности, радиус которой 25 см, по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды 40 см и 30 см. Найдите расстояние между хордами.

С-8

1. В треугольнике ABC угол B тупой, AD - высота этого треугольника. Какая сторона больше: AB или AC? Ответ обоснуйте.

2. Расстояние от дома до кинотеатра 0,4 км, а расстояние от кинотеатра до магазина 0,5 км. Может ли расстояние от дома до магазина равняться 1 км?

С-9

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 дм, сумма остальных двух его сторон равна 25 дм. Найдите гипотенузу и второй катет данного прямоугольного треугольника.

2. Найдите гипотенузу c, катет b и угол β прямоугольного треугольника по катету $a=7$ дм и противолежащему углу $\alpha=56°$.

С-10

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) $AC=3$ см, $\angle A=60°$. Найдите остальные стороны треугольника.

2. Медиана прямоугольного равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 4 см. Найдите стороны данного треугольника.

С-11

1. Докажите, что в равностороннем треугольнике медиана меньше его стороны.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $BD=\frac{25}{13}$ см, $BC=5$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC.

3. Найдите гипотенузу, катет и острый угол прямоугольного треугольника по катету $a=14$ см и противолежащему углу $\alpha=42°$.

С-12

1. Найдите расстояние от точки $A(-5;\ -2)$ до оси x.

2. Найдите координаты центра окружности, если концами ее диаметра являются точки $(-1;\ 1)$ и $(5;\ -5)$.

С-13

1. Составьте уравнение окружности с центром на прямой $y=4$, касающейся оси x в точке $(-1;\ 0)$.

2. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями $4x-2y-3=0$ и $3x+2y-9=0$.

С-14

1. Запишите уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку $(2; -3)$.

2. Окружность с центром в точке $(2; 1)$ касается оси x. Пересекает ли эта окружность ось y? Ответ объясните.

С-15

1. Чему равен косинус углов 120°, 135°, 150°?

2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ и $90° < \alpha < 180°$.

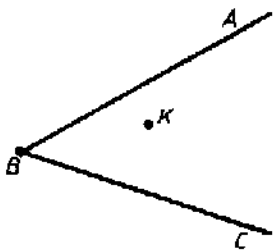
С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(-6; 4)$, $B(1; 2)$, $C(4; 0)$ проведена медиана BD. Найдите длину этой медианы и составьте уравнение прямой, содержащей эту медиану.

2. Используя геометрические соображения, составьте уравнение окружности, описанной около прямоугольника с вершинами в точках $(24; 0)$, $(0; 10)$, $(24; 10)$, $(0; 0)$.

3. Докажите, что косинусы смежных углов равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

С-17



1. Дан треугольник ABC. Постройте точки, симметричные точкам A и B относительно точки C.

2. Даны угол ABC и точка K, не лежащая на сторонах этого угла (см. рис.). Постройте фигуру, симметричную углу относительно точки K.

С-18

1. Дан квадрат $ABCD$. Постройте точку, симметричную точке B относительно прямой AC.

2. Сколько осей симметрии имеет квадрат?

С-19

1. Параллельный перенос задается формулами $x' = x - 2$, $y' = y + 1$. В какие точки при этом параллельном переносе перейдут точки $(0;\ 2)$, $(1;\ -3)$?

2. Существует ли параллельный перенос, при котором точка $(-2;\ 0)$ переходит в точку $(0;\ 2)$, а точка $(0;\ -1)$ — в точку $(2;\ 0)$?

С-20

1. При симметрии относительно середины стороны AC вершина B равностороннего треугольника ABC переходит в точку D. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом.

2. Дан четырехугольник $KLMN$. Постройте фигуру, в которую он переходит при симметрии относительно прямой MN.

3. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, при котором точка $(7;\ -5)$ переходит в точку $(5;\ -7)$.

С-21

1. Даны вектор $\overline{AC}$ и точка $B(-1;\ 2)$. Отложите от точки B вектор, равный вектору $\overline{AC}$.

2. Даны векторы $\bar{a}(1;\ 0)$, $\bar{b}(1;\ 2)$, $\bar{c}(1;\ 3)$. Найдите векторы $\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{b} + \bar{c}$.

3. Дан ромб $ABCD$. Выразите векторы $\overline{BD}$ и $\overline{CA}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$.

С-22

1. Дан вектор $\bar{b}(5;\ -12)$. Найдите абсолютную величину этого вектора и единичный вектор, одинаково направленный с ним.

2. Даны векторы $\bar{c}(1;\ 1)$ и $\bar{a}(0;\ -1)$. Найдите вектор $2\bar{c} - 3\bar{a}$.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Разложите вектор $\overline{DO}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

С-23

1. Найдите угол между векторами $\overline{m}(2;\ 3)$ и $\overline{n}\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. Даны векторы $\overline{a}(1;\ 4)$ и $\overline{b}(-3;\ 2)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\overline{a}+\lambda\overline{b}$ был перпендикулярен вектору $\overline{a}$.

С-24

1. Дан параллелограмм $MNPQ$. Найдите сумму векторов: а) $\overline{MN}$ и $\overline{MQ}$; б) $\overline{MN}$ и $\overline{NP}$; в) $\overline{MN}$ и $\overline{QP}$.

2. Найдите угол Q треугольника PQR, если $P(3;\ -1)$, $Q(3;\ 2)$, $R(-1;\ -2)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 3

С-1

1. Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найдите стороны параллелограмма.

2. Постройте параллелограмм с диагоналями 12 см и 8 см и углом $60°$ между ними.

С-2

1. Меньшая сторона прямоугольника равна 4 см и образует с диагональю угол $60°$. Найдите диагонали прямоугольника.

2. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как $1:4$. Найдите углы ромба.

С-3

1. Начертите произвольный отрезок AC и разделите его на 6 равных частей.

2. В прямоугольном треугольнике через середину его гипотенузы проведены прямые, параллельные его катетам. Найдите периметр образовавшегося прямоугольника, если катеты треугольника равны 10 см и 8 см.

С-4

1. В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна к ее боковой стороне и образует с основанием угол $15°$. Найдите углы трапеции.

2. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка, которые относятся как $3:8$. Найдите основания трапеции, если средняя линия трапеции равна 22 см.

С-5

1. Сумма двух углов параллелограмма равна 90°. Найдите все углы этого параллелограмма.

2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является прямоугольником.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 3 равные части, и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Найдите эти отрезки, если основание треугольника равно 6 см.

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Разделите гипотенузу AB на 3 равные части точками B_1 и B_2. Опустите из точек B_1 и B_2 перпендикуляры B_1C_1 и B_2C_2 на сторону AC. Вычислите отношения AC_1 к AB_1 и AC_2 к AB_2 и сравните их между собой и с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Высота равнобедренного треугольника равна 20 см, а его основание — 30 см. Найдите боковую сторону данного треугольника.

2. В окружности, радиус которой 25 см, проведены по одну сторону от ее центра две параллельные хорды 40 см и 30 см. Найдите расстояние между этими хордами.

С-8

1. BM — медиана треугольника ABC с тупым углом B. Какому отрезку: AM или MC — принадлежит основание высоты BD этого треугольника, если $AB > BC$? Почему?

2. Расстояние от школы до катка 1 км, а расстояние от катка до дома 1,2 км. Может ли расстояние от школы до дома равняться 3 км?

С-9

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, разность остальных двух его сторон равна 8 см. Найдите гипотенузу и второй катет данного прямоугольного треугольника.

2. Найдите катеты и угол β прямоугольного треугольника по гипотенузе $c = 15$ см и углу $\alpha = 38°$.

С-10

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 4$ см, $\angle B = 30°$. Найдите остальные стороны треугольника.

2. Биссектриса прямоугольного равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 3 см. Найдите стороны данного треугольника.

С-11

1. Докажите, что периметр параллелограмма меньше удвоенной суммы его диагоналей.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $CD = 8$ см, $AD = 15$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

3. Найдите катет и острые углы прямоугольного треугольника по гипотенузе $c = 18$ см и катету $a = 4$ см.

С-12

1. Найдите расстояние от точки $B(-2; 1)$ до оси y.

2. Найдите координаты конца диаметра, если другим его концом является точка $(5; -2)$, а центром окружности — точка $(2; 0)$.

С-13

1. Составьте уравнение окружности с центром на прямой $x = -3$, касающейся оси y в точке $(0; 2)$.

2. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями $3x + 4y + 7 = 0$ и $3x - y - 5 = 0$.

С-14

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(4; -2)$.

2. Окружность с центром в точке $(2; 3)$ касается оси y. Пересекает ли эта окружность ось x? Ответ объясните.

С-15

1. Чему равен тангенс углов 120°, 135°, 150°?

2. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ и $90° < \alpha < 180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(2; -3)$, $B(-2; 3)$, $C(6; -3)$ проведена средняя линия B_1C_1, параллельная стороне BC. Найдите длину B_1C_1 и составьте уравнение прямой, содержащей эту среднюю линию.

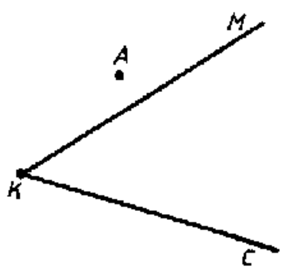
2. Составьте уравнение окружности, касающейся осей x и y и прямой $x = -4$.

3. Используя геометрические соображения, докажите, что прямая $y = 3$ не пересекает окружность, задаваемую уравнением $x^2 + (y+3)^2 = 25$.

С-17

1. Дан отрезок AB. Постройте точку C, симметричную точке B относительно точки A, и точку D, симметричную точке A относительно точки B.

2. Даны угол MKC и точка A, не лежащая на сторонах этого угла (см. рис.). Постройте фигуру, симметричную углу MKC относительно точки A.



С-18

1. Дан ромб $PQRS$. Постройте точку, симметричную точке P относительно прямой QS.

2. Сколько осей симметрии имеет ромб, не являющийся квадратом?

С-19

1. Параллельный перенос задается формулами $x' = x - 1$, $y' = y - 3$. В какие точки при параллельном переносе перейдут точки $(-1;\ 0)$, $(2;\ 1)$?

2. Существует ли параллельный перенос, при котором точка $(0;\ 2)$ переходит в точку $(-1;\ 0)$, а точка $(2;\ 1)$ — в точку $(1;\ -1)$?

С-20

1. Докажите, что при симметрии относительно точки прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

2. Дана трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Постройте фигуру, в которую она переходит при симметрии относительно прямой CD.

3. При параллельном переносе точка $(5;\ 5)$ переходит в точку $(-2;\ 12)$. В какую точку переходит при этом параллельном переносе точка $(-1;\ 3)$?

С-21

1. Даны вектор $\overline{BC}$ и точка $D(1;\ -2)$. Отложите от точки D вектор, равный вектору $\overline{BC}$.

2. Даны векторы $\bar{a}(-1;\ 0)$, $\bar{b}(-1;\ 2)$, $\bar{c}(-1;\ 1)$. Найдите векторы $\bar{b} - \bar{a}$ и $\bar{c} + \bar{b}$.

3. Дан прямоугольник $ABCD$. Выразите векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

С-22

1. Дан вектор $\bar{c}(5;\ 12)$. Найдите абсолютную величину этого вектора и единичный вектор, противоположно направленный ему.

2. Даны векторы $\overline{m}(0;\ -1)$ и $\bar{n}(-2;\ 1)$. Найдите вектор $3\overline{m} + 2\bar{n}$.

3. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Разложите вектор $\overline{OA}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

С-23

1. Найдите угол между векторами $\overline{c}(-1;\ 2)$ и $\overline{d}\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$.

2. Даны векторы $\overline{a}(1;\ 4)$ и $\overline{b}(-3;\ 2)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\overline{a}+\lambda\overline{b}$ был перпендикулярен вектору $\overline{b}$.

С-24

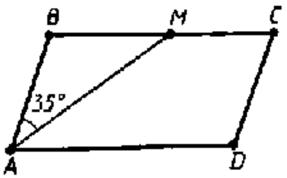
1. Дан параллелограмм $EFKL$. Найдите сумму векторов: а) $\overline{EF}$ и $\overline{EL}$; б) $\overline{FE}$ и $\overline{FK}$; в) $\overline{FK}$ и $\overline{EL}$.

2. Найдите угол F треугольника FGH, если $F(2;\ 0)$, $G(-6;\ 0)$, $H(0;\ 2\sqrt{3})$.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 4

С-1



1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ отсекает от него треугольник ABM с углом BAM, равным $35°$ (см. рис.). Найдите углы параллелограмма.

2. Постройте параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см и расстоянием между бóльшими сторонами, равным 2 см.

С-2

1. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит сторону BC на части 2 см и 6 см. Найдите периметр прямоугольника.

2. Найдите углы ромба, в котором одна диагональ равна стороне.

С-3

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Проведите через точку C прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла BAD, делился точкой C в отношении $2:3$.

2. Диагональ квадрата равна 7 см. Найдите периметр четырехугольника, образованного отрезками, последовательно соединяющими середины сторон данного квадрата.

С-4

1. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB, $BC=CD$, $\angle A=50°$. Найдите остальные углы трапеции.

2. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части, и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Докажите, что эти отрезки делят любой отрезок с концами на основаниях трапеции на 3 равные части.

С-5

1. Разность двух углов параллелограмма равна 90°. Найдите все углы этого параллелограмма.

2. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 являются серединами отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является квадратом.

3. Боковая сторона треугольника разделена на 3 равные части, и из точек деления проведены к другой боковой стороне отрезки, параллельные основанию треугольника. Чему равны основание треугольника и меньший из проведенных отрезков, если больший из них равен 2 см?

С-6

1. Начертите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Измерьте стороны AC и AB и вычислите отношение AC к AB.

2. Возьмите на гипотенузе AB две произвольные точки B_1 и B_2. Опустите из них перпендикуляры B_1C_1 и B_2C_2 на сторону AC. Вычислите отношения AC_1 к AB_1 и AC_2 к AB_2 и сравните их между собой и с отношением AC к AB предыдущей задачи.

С-7

1. Найдите стороны ромба, если его диагонали равны 24 см и 18 см.

2. В окружности проведена хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину. Найдите эту хорду, если диаметр окружности равен 8 см.

С-8

1. Докажите, что из двух хорд в окружности больше та, расстояние до которой от центра окружности меньше.

2. Докажите, что периметр параллелограмма больше суммы длин его диагоналей.

С-9

1. Катет a прямоугольного треугольника лежит против угла в 15°. Найдите второй катет этого треугольника, не используя тригонометрические функции угла.

2. Найдите гипотенузу и острые углы прямоугольного треугольника по его катетам $a=3$ см, $b=4$ см.

С-10

1. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30°, а прилежащий к нему катет равен 3 см. Найдите медиану этого треугольника, проведенную к гипотенузе.

2. В треугольнике ABC $\angle A=45°$, $\angle C=60°$, $BC=2$ см. Найдите AC.

С-11

1. Докажите, что периметр равнобокой трапеции больше суммы длин ее диагоналей.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. $CD=7$ см, $BD=24$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

3. Найдите гипотенузу и острые углы прямоугольного треугольника по катетам $a=5$ см и $b=10$ см.

С-12

1. Даны точки $A(2;\,4)$ и $B(3;\,-1)$. Докажите, что отрезок AB пересекает ось x, но не пересекает ось y.

2. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-1;\,2)$, $B(3;\,1)$, $D(-2;\,-3)$. Найдите координаты вершины C.

С-13

1. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $(0;\,2)$, $(4;\,0)$ и $(4;\,2)$.

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $(-3;\,1)$ и $(2;\,-2)$.

С-14

1. Какие углы образует прямая, заданная уравнением $2x+2y+3=0$, с осью x?

2. Докажите, что любая прямая, проходящая через середину радиуса окружности, пересекает ее в двух точках.

С-15

1. В треугольнике ABC угол C тупой. Может ли $\sin A = \sin C$? Почему?

2. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{40}{41}$ и $90° < \alpha < 180°$.

С-16

1. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 10)$, $C(1;\ -2)$ проведена средняя линия A_1B_1, параллельная стороне AB. Найдите длину A_1B_1 и составьте уравнение прямой, содержащей эту среднюю линию.

2. Составьте уравнение окружности, касающейся осей x и y и прямой $y=6$.

3. Используя геометрические соображения, докажите, что прямая $x=-1$ пересекает окружность $(x+2)^2+y^2=9$ в двух точках.

С-17

1. Дан отрезок AB. Постройте точку C, симметричную точке B относительно точки A, и точку D, симметричную точке A относительно точки B.

2. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка C, не лежащая на них. Постройте фигуры, в которые переходят прямые a и b при симметрии относительно точки C.

С-18

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой BC.

2. Может ли параллелограмм иметь ось симметрии и когда?

С-19

1. При параллельном переносе точка (1; 2) переходит в точку (2; 0). В какие точки переходят при этом точки (0; 2) и (2; 1)?

2. Два параллельных переноса задаются формулами $x'=x+2$, $y'=y+1$ и $x''=x'-1$, $y''=y'-2$. Какими формулами задается преобразование, которое получается в результате последовательного выполнения этих параллельных переносов?

С-20

1. Докажите, что при движении параллельные прямые переходят в параллельные, пересекающиеся — в пересекающиеся.

2. Дана трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Постройте фигуру, в которую она переходит при симметрии относительно прямой AD.

3. Существует ли параллельный перенос, при котором точка (2; 3) переходит в точку (3; 2), а точка (1; 4) — в точку (4; 1)?

С-21

1. Как должен быть расположен ненулевой вектор $\overline{a}$ относительно прямой l, чтобы нашлись лежащие на этой прямой векторы, равные $\overline{a}$? Сколько таких векторов найдется? Отметьте на чертеже три из них.

2. Даны векторы $\overline{a}(1;\ 1)$, $\overline{b}(2;\ 2)$, $\overline{c}(-1;\ 1)$. Найдите сумму векторов $\overline{a}-\overline{b}$ и $\overline{c}$.

3. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DA}$ через векторы $\overline{AO}$ и $\overline{BO}$.

С-22

1. Даны векторы $\overline{k}(-2;\ 1)$ и $\overline{l}(1;\ 0)$. Найдите вектор $\frac{1}{3}\overline{k}+\frac{1}{2}\overline{l}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K — середины сторон CD и AD соответственно. Разложите вектор $\overline{MK}$ по векторам $\overline{CB}$ и $\overline{DC}$.

3. Докажите, что векторы $\overline{a}(1;\ -2)$ и $\overline{b}(-2;\ 4)$ противоположно направлены.

С-23

1. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка M, что $AM = MB$. Найдите MC, если $AC = a$, $BC = 2a$, $\angle ACB = 60°$.

2. Найдите угол между векторами $\overline{a} = \overline{m} + \sqrt{3}\overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - \sqrt{3}\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

С-24

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DC} - \overline{DA}$.

2. Найдите углы A и B треугольника ABC, если $A(1;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(-1;\ -2)$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

Д-1. Параллелограмм

Даны вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$. Постройте четвертую его вершину D. Найдите два различных способа ее построения.

Дополнительный вопрос[1]. Однозначно ли определяется точка D условиями задачи? Ответ объясните.

Д-2. Ромб, квадрат

Докажите, что если у ромба диагонали равны, то он является квадратом. Найдите два различных доказательства.

Д-3. Трапеция

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD.

1. Докажите, что вершины C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB.

2. Докажите, что вершины C и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD. (Воспользоваться утверждением задачи 4 из § 4.)

3. Докажите, что луч AC пересекает диагональ трапеции BD. (Воспользоваться утверждением № 22 к § 2 учебника и первыми двумя утверждениями.)

4. Докажите, что диагонали трапеции пересекаются.

[1] На дополнительный вопрос учащиеся отвечают по желанию.

Д-4. Пропорциональные отрезки

1. Разделите данный отрезок AB пополам способом, основанным на теореме Фалеса (см. решение задачи 48 в п. 57 учебника).

2. Можно ли таким же способом разделить отрезок AB на части, пропорциональные данным отрезкам b и c? А именно: вместо равных отрезков на полупрямой a откладываем последовательно отрезки b и c. В остальном построение остается прежним. Ответ на поставленный вопрос обоснуйте, воспользовавшись теоремой о пропорциональных отрезках.

Дополнительный вопрос. Можно ли таким же способом разделить отрезок AB на n частей, пропорциональных отрезкам a_1, a_2, ..., a_n? Ответ обоснуйте.

Д-5. Перпендикуляр и наклонная

1. Из точки A, лежащей на стороне острого угла ABC, опущен перпендикуляр на прямую BC. На каком луче с началом в точке B лежит его основание? Почему?

2. На стороне BC прямоугольного треугольника ABC (угол C прямой) взята точка X. Докажите, что $AX < AB$.

3. На стороне BD треугольника ABD взята точка X. Докажите, что отрезок AX меньше по крайней мере одной из сторон треугольника: AB или AD.

4. Докажите, что расстояние между любыми точками, взятыми на сторонах треугольника, не превышает наибольшую из его сторон.

Д-6. Синус угла

1. Катеты прямоугольного треугольника равны $3a$ и $4a$. Чему равна гипотенуза этого треугольника?

2. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите его высоту, опущенную из вершины прямого угла на гипотенузу.

3. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием $6a$ и высотой $4a$.

4. Найдите радиус окружности, касающейся всех сторон ромба с диагоналями $6a$ и $8a$.

Д-7. Соотношения в прямоугольном треугольнике

Меньшее основание равнобокой трапеции, равное a, равно ее боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Чему равно большее основание трапеции? Решите задачу двумя различными способами.

Д-8. Неравенство треугольника. Существование треугольника с данными сторонами

1. Можно ли построить треугольник со сторонами, равными: а) 2 см, 5 см и 7 см; б) 4 см, 8 см и 11 см; в) 5 см, 6 см и 12 см?

2. Пересекаются ли две окружности, если: 1) $R_1=R_2=7$ см, расстояние между их центрами $d=13$ см; 2) $R_1=7$ см, $R_2=5$ см, $d=13$ см?

3. Окружности с радиусами 0,6 м и 3,2 м пересекаются. Чему равно расстояние между их центрами, если оно выражается целым числом метров?

4. R_1 и R_2 — радиусы окружностей, d — расстояние между их центрами. Докажите, что если одно из чисел R_1, R_2 или d равно сумме двух других, то окружности эти касаются друг друга.

Д-9. Координаты середины отрезка. Расстояние между точками

1. Найдите координаты середины отрезка с концами в точках $(-12; 6)$ и $(5; -1)$.

2. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-12; 6)$, $B(0; 11)$, $C(5; -1)$ и $D(-7; -6)$ является параллелограммом.

3. Докажите, что данный четырехугольник $ABCD$ является ромбом.

4. Докажите, что данный четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

Д-10. Пересечение прямой с окружностью

Докажите, что окружность $(x+6)^2+(y-8)^2=49$ пересекает ось y, но не пересекает ось x. Приведите два различных доказательства.

Д-11. Симметрия относительно точки и прямой

1. Докажите, что середина отрезка является его центром симметрии.

2. При некотором движении четырехугольник $ABCD$ переходит в себя. Докажите, что любая его вершина переходит при этом в вершину.

3. Докажите, что если у четырехугольника есть центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Докажите, что если у фигуры есть две и только две оси симметрии, то у нее есть и центр симметрии.

Д-12. Свойства параллельного переноса

1. При параллельном переносе точка A переходит в точку A_1, а точка B — в точку B_1. Чему равна длина отрезка A_1B_1, если $AB = 4$ см? Объясните ответ.

2. Что можно сказать о прямых AA_1 и BB_1 из предыдущего задания, если они различны? Ответ объясните.

3. При параллельном переносе точки A и B соответственно переходят в точки A_1 и B_1, не лежащие на прямой AB. Докажите, что если $AA_1 = AB$, то четырехугольник AA_1B_1B — ромб.

4. Докажите, что при параллельном переносе прямоугольник переходит в прямоугольник.

Д-13. Равенство векторов

1. Даны вектор $\overline{AB}$ и точка C, не лежащая на прямой AB. Постройте вектор $\overline{CD}$, равный вектору $\overline{AB}$.

2. Отложите от точки $A(2; 1)$ вектор, равный вектору $\overline{a}(2; 1)$.

3. Докажите, что если вектор $\overline{a}$ равен вектору $\overline{b}$ и вектор $\overline{b}$ равен вектору $\overline{c}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ равны.

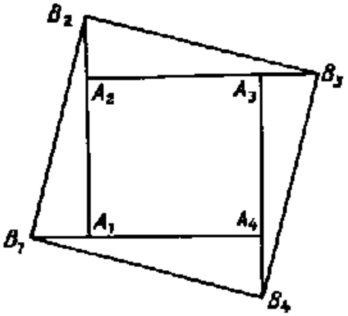
4. Докажите, что если при параллельном переносе, переводящем точку A в точку B, точка C переходит в точку D, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

Д-14. Правило параллелограмма и правило треугольника

Докажите, что если точка M — середина отрезка AB и O — любая точка на плоскости, то имеет место следующее векторное равенство: $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$. Найдите два различных доказательства.

Дополнительное задание. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка O. Докажите, что $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$.

Д-15. Скалярное произведение векторов



На продолжениях сторон квадрата $A_1A_2A_3A_4$ отложены равные отрезки $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3=A_4B_4$ (см. рис.). Докажите, что четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ — квадрат. Дайте два доказательства: одно с помощью векторов, другое без них.

Дополнительное задание. При каком отношении отрезков A_1B_1 и A_1A_2 угол φ между диагоналями квадратов A_1A_3 и B_1B_3 будет равен 30°?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи к § 6

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

2. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A+\angle B=\angle B+\angle C=180°$, то $ABCD$ — параллелограмм.

3. Диагональ параллелограмма делит его на два треугольника со сторонами 2, 3 и 4 см. Найдите периметр этого параллелограмма. Сколько решений имеет задача? Покажите их на чертеже.

4. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Известно, что $AB=4$ см, $BC=5$ см, $AC=6$ см. Найдите периметр параллелограмма, три вершины которого находятся в данных точках. Сколько решений имеет задача?

5. Дан равнобедренный треугольник. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр получившегося параллелограмма не зависит от выбора точки на основании данного треугольника.

6. Периметр треугольника, отсекаемого от параллелограмма диагональю, равен 25 см, а периметр параллелограмма — 30 см. Найдите диагональ.

7. Разность двух соседних сторон параллелограмма равна 10 см, а одна из них равна: а) 6 см; б) 13 см. Найдите другую сторону и периметр параллелограмма.

8. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки a и b. Выразите через a и b периметр этого параллелограмма.

9. Один из углов параллелограмма равен 45°. Перпендикуляр, опущенный из вершины его тупого угла, равен 4 см и своим основанием делит сторону параллелограмма на два равных отрезка. Найдите: а) эту сторону; б) углы, которые образует диагональ параллелограмма, проведенная из той же вершины, со сторонами параллелограмма.

10. Постройте параллелограмм по двум сторонам 2 см и 5 см, если известно, что одна из его диагоналей перпендикулярна к меньшей стороне.

11. Постройте параллелограмм по стороне, прилежащему к ней углу и диагонали, выходящей из вершины другого угла. Сколько решений может иметь эта задача?

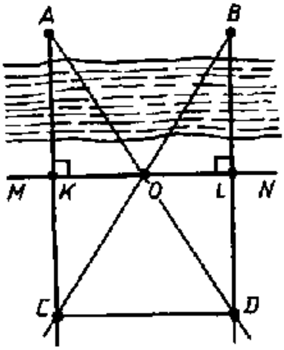


Рис. 1

12*. Постройте параллелограмм по периметру, диагонали и противолежащему ей углу.

13*. Постройте параллелограмм по стороне, сумме длин диагоналей и углу между ними.

14. Две доступные точки A и B разделены препятствием. Найдите расстояние между ними, пользуясь одним из признаков параллелограмма.

15. Найдите расстояние между недоступными точками A и B, используя признак параллелограмма, содержащийся в теореме 6.1.

16. Для определения расстояния между двумя недоступными точками A и B, расположенными на другом берегу реки (рис. 1), на местности провешивают произвольную прямую MN и отмечают на ней такие точки K и L, что $AK \perp MN$ и $BL \perp MN$. Разделив полученный таким образом отрезок KL пополам точкой O, провешивают через точку O прямые AO и BO и находят точки C и D их пересечения с прямыми AK и BL. Докажите, что полученный таким образом отрезок CD равен искомому отрезку AB.

17. 1) Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми. Сколько параллелограммов образовалось?

2) Сколько параллелограммов образуется при пересечении четырех параллельных прямых другими четырьмя параллельными прямыми?

3) Сколько образуется параллелограммов при пересечении n параллельных прямых другими n параллельными прямыми?

18. Дан параллелограмм $ABCD$. Через точку пересечения его диагоналей проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках E и F соответственно, а другая — стороны BC и AD в точках G и H. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

19*. Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах AB и CD отложены равные отрезки AE и CF, а на сторонах BC и AD — равные отрезки BG и DH. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

20*. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Диагональ AC пересекает отрезки BF и ED в точках G и H соответственно. Докажите, что отрезки AG, GH и HC равны.

21*. Можно ли заменить приведенное в учебнике А. В. Погорелова доказательство теоремы о свойствах диагоналей параллелограмма (теорема 6.2) таким рассуждением:

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и BD — его диагональ. Соединим точку O, являющуюся серединой отрезка BD, с точками A и C (рис. 2). Треугольники OBC и ODA равны по двум сторонам и углу между ними. У них $OB=OD$ по построению, $BC=DA$ по свойству противолежащих сторон параллелограмма, а углы OBC и ODA равны как внутренние накрест лежащие при параллельных BC, AD и секущей BD. Из равенства треугольников следует, что $OC=OA$, $\angle BOC=\angle DOA$. А из равенства углов BOC и DOA следует, что полупрямые OC и OA — дополнительные полупрямые одной прямой, т. е. что точка O лежит на прямой AC. Значит, диагонали AC и BD пересекаются в точке O, и так как $OB=OD$ по построению, а $OC=OA$ по доказанному, то этой точкой они делятся пополам. Теорема доказана.

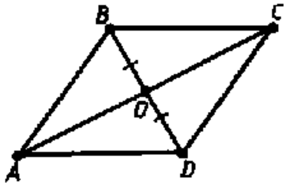


Рис. 2

22*. Докажите, что если у четырехугольника $ABCD$ $AB=CD$ и $BC=AD$, то этот четырехугольник — параллелограмм.

23. Докажите, что четырехугольник, у которого есть три прямых угла, является прямоугольником.

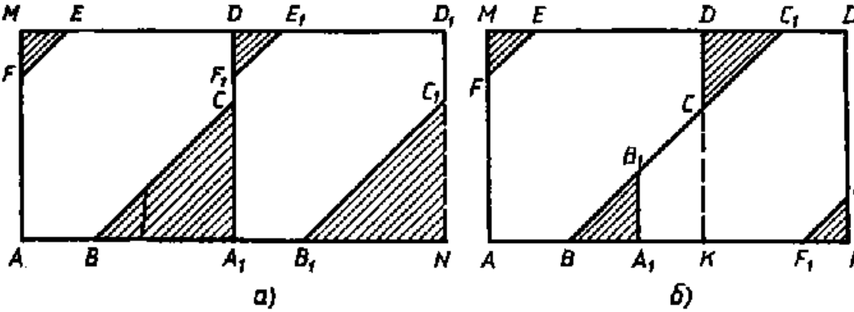


Рис. 3

24. Постройте прямоугольник по заданным серединам всех его сторон.

25. Постройте прямоугольник, если заданы точка пересечения его диагоналей и две соседние вершины.

26. Постройте прямоугольник по стороне и противолежащему ей углу между диагоналями прямоугольника.

27. Постройте прямоугольник по диагонали и периметру.

28. Школьная мастерская получила заказ на изготовление партии пластин прямоугольной формы. Параллельность противолежащих сторон пластин технология изготовления гарантирует. Как проверить, располагая лишь линейкой, будет ли пластина иметь форму прямоугольника?

29. Фруктовый сад колхоза имеет форму прямоугольника, стороны которого относятся как 16:11, причем его ширина меньше длины на 250 м. За сколько времени сторож может обойти по краю весь участок, идя со скоростью 4 км/ч?

30. На рисунках 3, *а*, *б* показаны соответственно нерациональный и рациональный раскрой стальной полосы при изготовлении заготовки для деталей комбайна. Подсчитайте, сколько погонных метров полосы будет сэкономлено при изготовлении 200 заготовок.

31. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся как 4:5. Найдите углы ромба.

32. Найдите углы ромба, если основание перпендикуляра, опущенного из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

33. Периметр ромба равен 16 см, расстояние между противолежащими сторонами — 2 см. Найдите углы ромба.

34. Через точку пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что точки пересечения этих перпендикуляров со сторонами ромба являются вершинами прямоугольника.

35. В параллелограмме $ABCD$ ($AD > AB$) биссектрисы углов A и B пересекают стороны параллелограмма BC и AD в точках K и L соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABKL$ — ромб.

36. Докажите, что почтовый конверт (стандартный) склеивается из листа бумаги, имеющего форму ромба (припуски на склеивание не учитывать).

37. Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и две соседние вершины.

38. Постройте ромб, если заданы точка пересечения его диагоналей и середины двух смежных сторон.

39. Как с помощью двусторонней линейки (с параллельными краями) разделить угол пополам?

40*. Постройте ромб по сумме длин диагоналей и одному из углов.

41. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного этими прямыми.

42. Докажите, что точка пересечения диагоналей квадрата является центром окружности, описанной около квадрата, т. е. проходящей через все его вершины.

43. Докажите, что точка пересечения диагоналей квадрата является центром окружности, вписанной в квадрат, т. е. касающейся всех его сторон.

44*. Постройте квадрат по сумме длин всех его сторон и диагоналей.

45. Паркетчик, проверяя, имеет ли выпиленный четырехугольник форму квадрата, убеждается, что диагонали равны

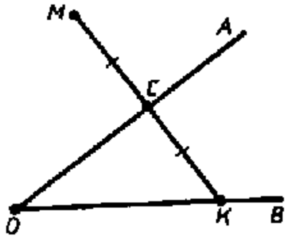


Рис. 4

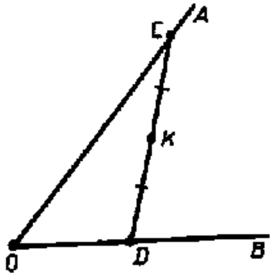


Рис. 5

и пересекаются под прямым углом. Достаточна ли такая проверка?

46. Хотят убедиться, что кусок материала в форме четырехугольника имеет форму квадрата. Для этого материю дважды перегибают сначала по одной, а потом по другой диагонали. Образующиеся треугольники оба раза точно совмещаются. Доказывает ли такая проверка, что этот кусок материи действительно имеет форму квадрата?

47. Сторона квадратной шайбы равна 60 мм. Какой длины должен быть лист стали, чтобы из него можно было сделать 50 шайб? Ширина листа 300 мм.

48. Заготовлены одинаковые по длине и ширине рейки в форме прямоугольников. Как обрезать концы реек под углом в 45°, не используя углоизмерительного инструмента, чтобы из них можно было сложить раму?

49. Имеется 9 палочек различной длины: 1 см, 2 см, ..., 9 см. С какими сторонами и сколькими способами можно составить квадраты из этих палочек? (Указание: все палочки использовать не обязательно; способы составления одного и того же квадрата считаются разными, если использованы разные наборы палочек.)

50. Дано: MK — средняя линия треугольника ABC, параллельная AC, D — произвольная точка основания AC, E — точка пересечения MK с BD. Докажите, что $BE = ED$.

51. Даны угол AOB и точка M вне его. Проведите через точку M прямую, пересекающую стороны угла так, чтобы отрезок MK делился точкой C пополам (рис. 4).

52. Даны угол AOB и точка K внутри него. Проведите через точку K отрезок CD так, чтобы точки C и D лежали на сторонах угла и отрезок CD делился точкой K пополам (рис. 5).

53. Докажите, что в любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон, делятся точкой их пересечения пополам.

54*. На каждой стороне одного параллелограмма лежит одна из вершин другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей у этих параллелограммов совпадают.

55. Используя свойство средней линии треугольника, найдите расстояние между двумя недоступными точками A и B.

56. Найдите расстояние до недоступной точки, используя свойство средней линии треугольника.

57. Одна из вершин земельного участка треугольной формы недоступна. Как измерить периметр этого участка?

58. В трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно 4 см. Через вершину B проведена прямая, параллельная стороне CD. Периметр образовавшегося треугольника равен 12 см. Найдите периметр трапеции.

59. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB, основание BC равно другой боковой стороне, угол A равен 40°. Найдите остальные углы трапеции.

60. В равнобокой трапеции диагональ делит острый угол пополам. Периметр трапеции равен 132 см, а основания относятся как 2 : 5. Найдите среднюю линию трапеции.

61. Если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются в точке, лежащей на другом основании, то второе основание трапеции равно сумме длин боковых сторон трапеции. Докажите.

62. Докажите, что у равнобокой трапеции сумма противолежащих углов равна 180°.

63. Докажите, что если углы при основании трапеции равны, то она равнобокая.

64. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению задачи 62.

65. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

Задачи к § 7

66. Периметр квадрата равен 4 см. Найдите его диагональ.

67. Высота равностороннего треугольника равна 3 дм. Найдите его сторону.

68. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 см, а сумма катетов — 7 см. Найдите катеты.

69. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см, а высота, опущенная на основание,— 6 см. Найдите стороны треугольника.

70. Периметр прямоугольного треугольника равен 10 см, а один из катетов — 4 см. Найдите другой катет и гипотенузу.

71. Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 3 см, а отношение гипотенузы к большему катету равно 5 : 4. Найдите стороны треугольника.

72. Периметр прямоугольника равен 28 м, а диагональ — 10 м. Найдите стороны прямоугольника.

73. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. Докажите, что высота, опущенная из вершины прямого угла, равняется $\frac{ab}{c}$.

74. В прямоугольной трапеции (одна боковая сторона перпендикулярна основаниям трапеции) один из углов равен 135°, средняя линия равна 18 см, а основания относятся как 1 : 8. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

75*. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Пусть биссектриса острого угла A прямоугольного треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр к катету BC в точке D (рис. 6). Опустим из точки D перпендикуляры DQ на гипотенузу AB и DR на катет AC. $\triangle ADQ = \triangle ADR$ по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $DQ = DR$ и $AQ = AR$. $\triangle DCR = \triangle DBQ$ по гипотенузе и катету ($DB = CD$ по теореме 5.3, а $DQ = DR$ по доказанному). Из равенства треугольников следует, что $BQ = CR$. Отсюда для гипотенузы имеем: $AB = AQ + BQ = AR + CR = AC$ (по доказанному $AQ = AR$ и $BQ = CR$), т. е. гипотенуза равна катету, что противоречит следствию из теоремы Пифагора.

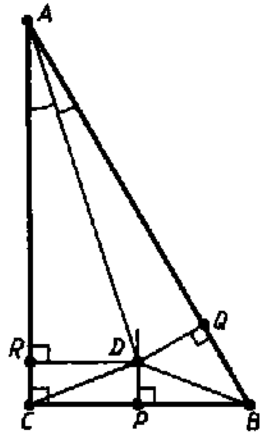


Рис. 6

76. Для установки мачты телевизионной антенны изготовлены тросы длиной $l = 20{,}2$ м. Тросы крепятся к этой мачте на высоте $h = 18{,}62$ м. Определите, на каком расстоянии от основания мачты нужно укрепить концы каждого троса.

77. Параллельно прямой дороге на расстоянии 500 м от нее расположена цепь стрелков. Расстояние между крайними стрелками равно 120 м, дальность полета пули равна 2800 м. Какой участок дороги находится под обстрелом этой цепи?

78. Имеется цилиндрическая заготовка большого диаметра. Как найти диаметр заготовки, пользуясь штангенциркулем?

79. Строительная ферма имеет ноги AB и BC по 8,5 м, пролет AC в 15 м. Определите высоту фермы BD и высоту всех ее вертикальных стоек, которые делят пролет AC пятами строительных ног на 6 равных частей (рис. 7).

80. 12 апреля 1961 г. Юрий Гагарин на космическом корабле «Восток» пролетел над Землей на высоте 327 км. Чему было в это время равно расстояние от корабля «Восток» до наиболее удаленных видимых с него участков поверхности Земли? (Радиус Земли принять ≈6400 км.)

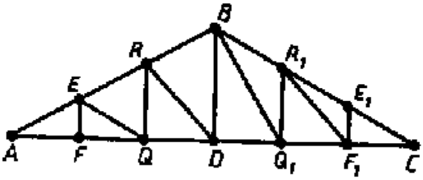


Рис. 7

81. С вертолета на башню высотой 79,5 м был сброшен вымпел. В этот момент прямая, соединяющая наблюдателя и вертолет, образовывала с горизонтальной плоскостью угол 63°30′, а прямая, соединяющая наблюдателя с верхушкой башни,— угол 20°45′. На какой высоте над землей находился вертолет?

82. На прямолинейном железнодорожном пути находятся два пункта A и B. Расстояние $AB = 470$ м. Пункт B расположен на 8 м выше пункта A. Найдите угол подъема пути на участке AB.

83. На рисунке 8 изображена схема погрузочного крана, стрела BC которого равна 9 м и может иметь максимальное отклонение от вертикальной колонны AB на угол 64°. Определите радиус действия крана.

84. Из пункта A вышел крейсер со скоростью 36 км/ч. Через 2 ч крейсеру по радио был дан приказ изменить курс на 90° влево, и одновременно из пункта A для встречи с крейсером вышел катер со скоростью 54 км/ч. Под каким углом к первоначальному направлению движения крейсера должен идти катер, чтобы встретиться с ним в кратчайший срок?

85. Движущаяся лестница (эскалатор) Московского метрополитена имеет 170 ступенек от пола наземного вестибюля до пола подземной станции. Ширина ступенек 40 см, высота 20 см. Определите: а) длину лестницы; б) угол ее наклона; в) глубину станции по вертикали.

86. В 800 м за точкой отрыва самолета от земли расположены деревья высотой 20 м. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревья?

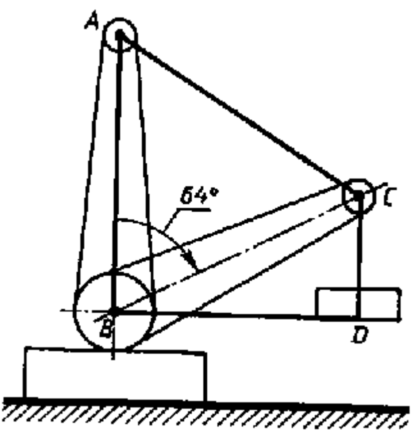


Рис. 8

87. Между двумя площадками лестничной клетки требуется уложить на металлических балках бетонные ступени. Под каким углом к горизонту следует закрепить балки, если подъем ступени равен 15,5 см, а ее ширина — 32,5 см?

88. Для определения высоты облака от поверхности Земли в ночное время применяется «потолочный прожектор», лучи которого направлены по вертикали и оставляют белое пятно на облаке. Найдите высоту облака, если угол между направлением на освещенную часть облака и направлением на прожектор равен α, а расстояние от наблюдателя до прожектора равно a.

89. Прожектор, расположенный в 1200 м от батареи, обнаружил зенитным лучом (вертикальным) неприятельский самолет. Наблюдатель с батареи в то же время увидел этот самолет под углом $25°17'$. Найдите, на какой высоте летел самолет и на каком расстоянии от батареи.

90. Упростите выражение:

а) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+1$;

б) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

в) $(1+\operatorname{ctg}^3\alpha)\sin^2\alpha-\operatorname{ctg}^4\alpha$;

г) $(1-\operatorname{tg}^4\alpha)\cos^2\alpha$; д) $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$;

е) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$; ж) $\dfrac{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}^2\alpha)^2+\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}$.

Задачи к § 8

91. Определите вид четырехугольника $ABCD$ (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат), если:

а) $A(0; 8)$, $B(-6; 0)$, $C(2; -6)$, $D(8; 2)$;

б) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(2; 2)$, $D(1; 0)$;

в) $A(2; 3)$, $B(3; 5)$, $C(4; 3)$, $D(3; 1)$;

г) $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(6; 2)$, $D(5; 0)$.

92. Составьте уравнение окружности, которая проходит через точку $(2; 2)$ и касается оси x и прямой $y=4$.

93. Составьте уравнение окружности, которая касается осей x и y и прямой $x=6$.

94. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $(0; 0)$ и $(a; b)$.

95. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

а) $5x-7y-20=0$ и $7x-10y+15=0$;

б) $2x+3y-7=0$ и $4x+6y+11=0$;

в) $2x-y=0$ и $x+0{,}5y=0$.

96. Окружность радиуса 3 см касается двух параллельных прямых. Чему равно расстояние между этими прямыми?

97. Расстояние от вершины угла до точек касания его сторон с вписанной в него окружностью равно радиусу этой окружности. Чему равен данный угол?

98. Окружность с центром в точке $(-2; 4)$ касается оси x. В скольких точках эта окружность пересекает ось y?

99. Окружность с центром в точке $(5; -3)$ касается оси y. В скольких точках пересекает она ось x?

100. Даны прямоугольный треугольник с катетами a и b и окружность радиуса R с центром в вершине прямого угла этого треугольника. Пересекает ли окружность прямую, содержащую гипотенузу данного треугольника, если: а) $a=3$, $b=4$, $R=2,5$; б) $a=20$, $b=15$, $R=12$; в) $a=5$, $b=12$, $R=4$?

Задачи к § 9

101. Расстояние между точками A и B равно 7 см, а между точками A_1 и B_1 — 8 см. Могут ли точки A_1 и B_1 быть симметричными точкам A и B относительно: а) точки; б) прямой?

102. Могут ли основания трапеции быть симметричными друг другу фигурами относительно: а) точки; б) прямой?

103. Докажите, что если у четырехугольника есть центр симметрии, то он является параллелограммом.

104. Прямые a и b параллельны, а прямые a_1 и b_1 пересекаются. Существует ли движение, при котором прямые a_1 и b_1 переходили бы в прямые a и b?

105. Докажите, что при движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

106. Могут ли параллелограмм и трапеция быть симметричными друг другу относительно: а) точки; б) прямой?

107. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке M. Точки P, Q и R — середины отрезков AM, BM и CM соответственно. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1=\triangle PQR$.

108. Известны две вершины параллелограмма, вписанного в данный четырехугольник (на каждой стороне четырехугольника лежит по одной вершине параллелограмма). Постройте этот параллелограмм, если две его известные вершины являются противолежащими.

109. Три вершины прямоугольника лежат на окружности. Где находится центр этой окружности? Лежит ли на ней четвертая вершина прямоугольника?

110. Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр и перпендикулярна этим хордам.

111. Окружность F_1 пересекает концентрические окружности F_2 и F_3 в точках A, B и C, D соответственно. Докажите, что хорды AB и CD параллельны.

112. Даны две концентрические окружности. Постройте ромб, отличный от квадрата, чтобы: а) две вершины ромба принадлежали одной окружности, а две другие — другой; б) три вершины ромба принадлежали одной окружности, а одна — другой.

113. Докажите, что точка пересечения прямых, которые содержат боковые стороны равнобокой трапеции, точка пересечения ее диагоналей и середины оснований лежат на одной прямой.

114. Постройте квадрат $ABCD$ по его центру O (точка пересечения диагоналей) и точкам M и N, лежащим на прямых AB и BC соответственно ($OM \neq ON$).

115*. Постройте такой равносторонний треугольник, чтобы одна его вершина совпадала с данной точкой O, а две другие принадлежали двум данным окружностям.

116*. Через данную точку внутри окружности проведите хорду данной длины, меньшей диаметра окружности.

117*. Дан квадрат. Через центр этого квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые (не обязательно проходящие через вершины квадрата). Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

118. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 4$, $y' = y + 3$. а) Постройте точки, в которые переходят при этом параллельном переносе точки $O(0; 0)$, $A(2; 3)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -2)$, $D(1; -4)$. б) Какие точки переходят при этом параллельном переносе в точки $E'(1; -2)$, $F'(1; 1)$, $G(-2; -1)$?

119. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A', а точка B — в точку B', если $AB = 1{,}9$ см, $A'B' = 2$ см?

120. Дана равнобокая трапеция $ABCD$, AD и BC — ее основания. а) Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку D, а точка B — в точку C? б) Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка D — в точку C?

121. При параллельном переносе точка A переходит в точку A'. Постройте точку X', в которую при этом переходит данная точка X. Сколько решений имеет задача? (Координаты точек A, A' и X не заданы.)

122. Докажите, что при параллельном переносе:
а) параллелограмм переходит в параллелограмм;
б) прямоугольник переходит в прямоугольник;
в) ромб переходит в ромб;
г) квадрат переходит в квадрат;
д) трапеция переходит в трапецию.

Задачи к § 10

123. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ равны. Докажите, что если точки A, B, A_1 и B_1 не лежат на одной прямой, то четырехугольник ABB_1A_1 — параллелограмм.

124. Даны четыре точки $A(0; -1)$, $B(3; -4)$, $C(2; -1)$, $D(-1; 2)$. а) Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BA}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$. б) Какие из этих векторов равны? Вершинами какой фигуры являются данные четыре точки?

125. Координаты вектора $\overline{a}$ равны 2, -3. Чему равны координаты конца вектора $\overline{AB}$, равного вектору $\overline{a}$, если: а) $A(0;\ 0)$; б) $A(0;\ -3)$; в) $A(-1;\ 0)$; г) $A(3;\ 4)$?

126. Даны два параллелограмма $ABCD$ и A_1BC_1D. Докажите, что $\overline{AA_1}=\overline{C_1C}$.

127. Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$, где O — любая точка плоскости.

128. Дан параллелограмм $ABCD$, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{0}$.

129. Даны треугольник ABC и точка M. Докажите, что если M — точка пересечения медиан, то $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$.

130. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}$.

131. Дан треугольник ABC. От произвольной точки O отложены векторы $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$, такие, что $\overline{OA_1}=\overline{BC}$, $\overline{OB_1}=\overline{CA}$ и $\overline{OC_1}=\overline{AB}$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с точкой O.

132. Даны три точки A, B и C, такие, что $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Докажите, что для любой точки O верно равенство $\overline{OB}=\frac{1}{3}\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{OC}$.

133*. Даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины пар отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, имеют общую середину.

134. Дана окружность с центром O. Проведены перпендикулярные хорды AB и CD. Хорды или их продолжения пересекаются в точке M. Докажите, что $\overline{OM}=0{,}5(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$.

135. Дан параллелограмм $ABCD$. O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=4\overline{PO}$, где P — любая точка плоскости.

136. Даны три точки A, B и C, такие, что $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$. Докажите, что для любой точки O имеет место равенство $\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+\lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$.

137. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1, такие, что $\overline{AC_1}=k\overline{AB}$, $\overline{BA_1}=k\overline{BC}$, $\overline{CB_1}=k\overline{CA}$. Вычислите $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}$.

138. Дана окружность с центром O. Проведены две равные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что сумма векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ коллинеарна вектору $\overline{OM}$.

139. Дана трапеция $ABCD$. Прямая, параллельная ее основаниям AB и CD, пересекает боковые стороны AD и BC соответственно в точках M и N. Докажите, что если $AN \parallel CM$, то $DN \parallel BM$.

140. Дана трапеция $ABCD$, у которой AB и CD — основания, а точки M и N — середины ее боковых сторон AD и BC. Докажите, что AN и CM не параллельны.

141*. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{0}$, то четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

142. Даны два перпендикулярных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Докажите, что $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}-\overline{b}|$.

143. Даны два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Докажите, что если $|2\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}+2\overline{b}|$, то $|\overline{a}|=|\overline{b}|$.

144. Найдите косинус угла α между векторами: а) $\overline{a}(3; -4)$ и $\overline{b}(5; 12)$; б) $\overline{c}(8; -15)$ и $\overline{d}(8; 6)$; в) $\overline{m}(6; 2)$ и $\overline{n}(9; -3)$.

145. Найдите углы треугольника с вершинами в точках $A(4\sqrt{3}; -1)$, $B(0; 3)$, $C(8\sqrt{3}; 3)$.

146. Даны четыре точки $A(7; -3)$, $B(8; 4)$, $C(1; 5)$ и $D(0; -2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1 *Вариант 1*

1°. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. а) Докажите, что треугольник AOB равен треугольнику COD. б) Известно, что $AC = 10$ см, $BD = 6$ см, $AB = 5$ см. Определите периметр треугольника AOB.

2. Один из углов параллелограмма равен 45°. Высота параллелограмма, проведенная из вершины его тупого угла, равная 4 см, делит сторону параллелограмма на два равных отрезка. Периметр параллелограмма равен 27,4 см. Найдите: а) стороны параллелограмма; б) диагональ, проведенную из той же вершины, что и высота.

К-1 *Вариант 2*

1°. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC разбивает его на два равных треугольника BAC и DCA. а) Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм. б) Известно, что угол BAC равен 30°, а угол BCA равен 40°. Определите углы параллелограмма.

2. Из вершины тупого угла ромба, равного 120°, проведена высота, которая отсекает от стороны отрезок 2 см. а) Найдите периметр ромба и длину меньшей диагонали. б) Докажите, что высота является биссектрисой угла, образованного диагональю и стороной ромба.

К-1 *Вариант 3*

1°. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. а) Докажите, что треугольник AOB равнобедренный. б) Определите периметр треугольника AOB, если известно, что $AB=4$ см, $BD=5$ см.

2. Из вершины прямоугольника опущен перпендикуляр на диагональ, который делит ее на два отрезка, меньший из которых равен 2 см. Перпендикуляр образует с меньшей стороной прямоугольника угол в 30°. а) Вычислите длину меньшей стороны прямоугольника и длины диагоналей. б) Докажите, что данный перпендикуляр является биссектрисой угла, образованного другой диагональю и меньшей стороной прямоугольника.

К-1 *Вариант 4*

1°. В ромбе $ABCD$ диагональ BD равна его стороне. а) Докажите, что треугольник ABD равносторонний. б) Известно, что $BO=4$ см (O — точка пересечения диагоналей). Найдите периметр ромба.

2. Периметр ромба равен 16 см; высота, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. а) Определите углы ромба, длину диагонали, проведенной из той же вершины. б) Докажите, что высота является биссектрисой угла, образованного данной диагональю и стороной ромба.

К-2 *Вариант 1*

1°. В треугольнике ABC KM — средняя линия (точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и BC). а) Докажите, что периметр треугольника KBM равен половине периметра треугольника ABC. б) Определите периметр треугольника KBM, если треугольник ABC равносторонний со стороной 6 см.

2. BA и BD — отрезки одной стороны угла B; BC и BE — отрезки другой его стороны. Узнайте, параллельны ли прямые AC и DE, если $BA:AD=3:4$, $BC=1{,}2$ м и $BE=2{,}8$ м.

3. В треугольнике ABC проекции боковых сторон AC и BC на основание AB равны 15 см и 27 см, а большая боковая сторона равна 45 см. На какие части она делится (считая от вершины C) перпендикуляром к стороне AB, проведенным из середины AB?

К-2 *Вариант 2*

1°. Точки P, M и K — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC. а) Докажите, что периметр треугольника PMK равен половине периметра треугольника ABC. б) Найдите периметр треугольника ABC, если $PM=4$ см, $MK=5$ см, $MP=6$ см.

2. Точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB=1:2$. Найдите отношения $AM:AB$ и $MB:AB$.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке P, $AD=10$ см, средняя линия трапеции $APCD$ равна 6 см. Определите периметр параллелограмма.

К-2 *Вариант 3*

1°. MK — средняя линия трапеции $ABCD$ (точки M и K лежат соответственно на сторонах AB и CD). Через точку K проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AD в точке P. а) Докажите, что $AMKP$ — параллелограмм. б) Найдите периметр параллелограмма $AMKP$, если $AB=4$ см, $BC=5$ см, $AD=7$ см.

2. Боковые стороны прямоугольной трапеции относятся как $1:2$. Найдите наибольший угол трапеции.

3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB=6$ см, $AD=10$ см, AK — биссектриса угла A (K принадлежит стороне BC). Определите среднюю линию трапеции $AKCD$.

К-2 *Вариант 4*

1°. В равностороннем треугольнике ABC со стороной 8 см проведена средняя линия MK (точки M и K лежат соответственно на сторонах AB и BC). а) Докажите, что четырехугольник $AMKC$ — равнобокая трапеция. б) Найдите периметр трапеции $AMKC$.

2. Три стороны трапеции равны a, углы при большем основании равны 60°. Определите периметр трапеции.

3. В параллелограмме $ABCD$ $AD=20$ см, $AB=BD$, BK — высота треугольника ABD. Определите среднюю линию трапеции $KBCD$.

К-3 *Вариант 1*

1°. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 6 см. Определите гипотенузу.

2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $CB = 3$ см. Определите AC.

3. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 6 см. Найдите высоту, опущенную из вершины прямого угла.

К-3 *Вариант 2*

1°. Стороны прямоугольника равны 12 см и 5 см. Найдите диагонали.

2. В окружность, радиус которой равен 17 см, вписан прямоугольник. Найдите стороны этого прямоугольника, если отношение их равно 15 : 8.

3. В прямоугольной трапеции разность оснований равна a. Наклонная боковая сторона трапеции равна b, а большая диагональ — c. Найдите основания трапеции.

К-3 *Вариант 3*

1°. В равнобедренном треугольнике ABC высота BD равна 8 см, а основание AC равно 12 см. Найдите длину боковой стороны.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 дм, боковая сторона меньше основания на 1,5 дм. Найдите высоту этого треугольника.

3. Из одной точки проведены к кругу две касательные. Длина касательной равна 156 дм, а расстояние между точками касания равно 120 дм. Определите радиус круга.

К-3 *Вариант 4*

1°. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите сторону ромба.

2. Высота равнобедренного треугольника равна 14 дм, основание относится к боковой стороне как 48 : 25. Найдите стороны этого треугольника.

3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найдите периметр треугольника.

К-4 *Вариант 1*

1°. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см, а катет AC равен 5 см. Найдите второй катет и острые углы треугольника.

2. Найдите острый угол между диагоналями прямоугольника со сторонами, равными 12 см и 8 см.

3. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, из точки пересечения которых она проведена.

К-4 *Вариант 2*

1°. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите острые углы и катеты.

2. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше одного из катетов на 1 см, а второй катет равен 9 см. Вычислите угол, лежащий против меньшего катета.

3. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра.

К-4 *Вариант 3*

1°. В прямоугольном треугольнике даны катет 8 см и прилежащий к нему угол 54°. Найдите второй катет и гипотенузу.

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен α, высота, опущенная на боковую сторону, равна l. Найдите стороны треугольника.

3. Докажите, что сумма диагоналей трапеции больше суммы ее оснований.

К-4 *Вариант 4*

1°. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 8 см, а угол A равен 40°. Найдите катеты и второй острый угол.

2. Боковые стороны трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите BA, если $\angle BAD = 28°$, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см.

3. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше половины его периметра.

К-5 *Вариант 1*

1°. Точки $B(6;\ 0)$ и $D(0;\ 8)$ являются концами диаметра окружности. Найдите: а) координаты центра окружности; б) длину радиуса окружности; в) запишите уравнение данной окружности.

2. Отрезок BD является диагональю прямоугольника $ABCD$, где $A(0;\ 0)$, $B(6;\ 0)$, $D(0;\ 8)$. Найдите координаты вершины C и периметр прямоугольника.

К-5 *Вариант 2*

1°. Прямая a задана уравнением $4x+3y-6=0$. Найдите: а) координаты точек A и B пересечения прямой с осями координат (A и B лежат соответственно на осях x и y); б) длину AB; в) постройте эту прямую.

2. Запишите уравнение прямой b, параллельной оси ординат и пересекающей прямую a, заданную уравнением $4x+3y-6=0$, в точке $C(-1{,}5;\ 4)$. Найдите периметр треугольника, ограниченного прямыми a и b и осью абсцисс.

К-5 *Вариант 3*

1°. Точки $A(-2;\ 4)$, $B(-6;\ 12)$ и $C(2;\ 8)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите: а) координаты точки пересечения диагоналей; б) длины сторон параллелограмма; в) координаты его четвертой вершины.

2. Запишите уравнения прямых, на которых лежат диагонали параллелограмма $ABCD$ из задания 1.

К-5 *Вариант 4*

1°. Прямая a пересекает окружность в точках $A(-7;\ 7)$ и $B(-1;\ -1)$ и проходит через ее центр. Найдите: а) координаты центра окружности; б) длину радиуса окружности; в) запишите уравнения окружности и прямой a.

2. Отрезок AB является диагональю прямоугольника $ACBD$, где $C(1;\ 2)$, $A(-7;\ 7)$ и $B(-1;\ -1)$. Найдите координаты вершины D и периметр прямоугольника $ACBD$.

К-6 *Вариант 1*

Дан отрезок AB, где $A(3; -1)$, $B(1; -2)$.

1°. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно начала координат, и укажите координаты точек A_1 и B_1.

2°. Существует ли параллельный перенос, при котором точка B переходит в точку C, а точка A — в точку B_1?

3. При условии, что существует параллельный перенос, задайте его формулами.

4. Докажите, что полупрямые AB и A_1B_1 противоположно направлены.

5. Докажите, что четырехугольник ABA_1B_1 — параллелограмм.

К-6 *Вариант 2*

Дан треугольник ABC, где $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(-1; 2)$.

1°. Постройте точку A_1, симметричную точке A относительно прямой CB, и укажите ее координаты.

2°. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку C, точка B — в точку A_1?

3. При условии, что параллельный перенос существует, задайте его формулами.

4. Докажите, что полупрямые AB и CA_1 одинаково направлены.

5. Докажите, что полученная фигура — квадрат.

К-6 *Вариант 3*

Дан отрезок CD, где $C(-4; 1)$, $D(-1; 1)$.

1°. Постройте отрезок C_1D_1, симметричный отрезку CD относительно оси x, и укажите координаты точек C_1 и D_1.

2°. Существует ли параллельный перенос, при котором точка C переходит в точку C_1, точка D — в точку D_1?

3. При условии, что параллельный перенос существует, задайте его формулами.

4. Докажите, что полупрямые CD и C_1D_1 одинаково направлены.

5. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 — прямоугольник.

К-6 *Вариант 4*

Дан треугольник ABC, где $A(-1;\ 1)$, $B(-3;\ -2)$, $C(-1;\ -5)$.

1°. Постройте точку B_1, симметричную точке B относительно прямой AC, и укажите координаты точки B_1.

2°. Существует ли параллельный перенос, при котором точка B переходит в точку A, точка C — в точку B_1?

3. При условии, что параллельный перенос существует, задайте его формулами.

4. Докажите, что лучи AB и CB_1 противоположно направлены.

5. Докажите, что четырехугольник $ABCB_1$ — ромб.

К-7 *Вариант 1*

Даны точки $A(2;\ 4)$, $B(1;\ 3)$, $C(1{,}75;\ 1{,}25)$, $D(3;\ 0)$.

1°. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

2°. Найдите вектор, равный $\overline{AB}-\overline{CD}$.

3°. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

4. Пусть $\overline{AM}=3\cdot\overline{AB}$, $\overline{DN}=4\cdot\overline{DC}$. Найдите координаты точек M и N.

5. Постройте в координатной плоскости четырехугольник $ADMN$. Выразите векторы $\overline{DN}$ и $\overline{AM}$ через векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AN}$.

6. Докажите, что четырехугольник $ADMN$ — ромб.

К-7 *Вариант 2*

Даны точки $A(3;\ -1)$, $B(4;\ 1)$, $C(2;\ 0)$, $D(3;\ 1)$.

1°. Найдите координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

2°. Найдите вектор, равный $\overline{BD}-\overline{CA}$.

3°. Определите угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{DB}$.

4. Пусть $\overline{BM}=6\cdot\overline{BD}$, $\overline{AN}=4\cdot\overline{AC}$. Найдите координаты точек M и N.

5. Постройте в координатной плоскости четырехугольник $ABNM$. Выразите векторы $\overline{AN}$ и $\overline{BM}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$.

6. Докажите, что четырехугольник $ABNM$ — параллелограмм.

К-7

Вариант 3

Даны точки $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 1)$, $C(2;\ -1)$.

1°. Найдите координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$.

2°. Найдите вектор, равный $\overline{AB}-\overline{AC}$.

3°. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

4. Пусть $\overline{AM}=4\cdot\overline{AB}$, $\overline{AN}=2\cdot\overline{AC}$. Найдите координаты точек M и N.

5. Постройте в координатной плоскости треугольник AMN. Выразите вектор $\overline{AN}$ через векторы $\overline{NM}$ и $\overline{AM}$, вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{BA}$ и $\overline{CA}$.

6. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

К-7

Вариант 4

Даны точки $A(-2;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-1{,}5;\ 1{,}5)$, $D(-4;\ 1)$.

1°. Найдите координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

2°. Найдите вектор, равный $\overline{AC}-\overline{BD}$.

3°. Определите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

4. Пусть $\overline{AK}=2\cdot\overline{AC}$. Найдите координаты точки K.

5. Постройте в координатной плоскости четырехугольник $ABKD$. Выразите векторы $\overline{KD}$ и $\overline{KA}$ через векторы $\overline{DB}$ и $\overline{DA}$.

6. Определите вид четырехугольника $ABKD$.

К-8

Вариант 1

1. Диагонали ромба равны 1,6 см и 3 см. Чему равна сторона данного ромба?

2. Катет, противолежащий углу в 60° данного прямоугольного треугольника, равен 3 см. Найдите гипотенузу, второй катет и острый угол этого треугольника.

3. Вершинами четырехугольника $ABCD$ являются точки $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 2)$, $C(2;\ 0)$ и $D(1;\ -2)$. Докажите, что данный четырехугольник является ромбом.

К-8 *Вариант 2*

1. Стороны прямоугольника равны 1,6 дм и 3 дм. Чему равна диагональ данного прямоугольника?

2. Катет, прилежащий к углу в 30° данного прямоугольного треугольника, равен 9 дм. Найдите гипотенузу, второй острый угол и катет этого треугольника.

3. Вершинами четырехугольника $PQRS$ являются точки $P(0;\ 0)$, $Q(1;\ 2)$, $R(5;\ 0)$ и $S(4;\ -2)$. Докажите, что данный четырехугольник является прямоугольником.

К-8 *Вариант 3*

1. У равнобокой трапеции боковая сторона и меньшее основание равны 5 см, расстояние между основаниями равно 1,4 см. Найдите большее основание данной трапеции.

2. Один из углов трапеции равен 30°, а боковые стороны при их продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 5 см, а меньшее основание — 4 см.

3. Известны координаты первых трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(5;\ -4)$, $B(2;\ -3)$ и $C(-1;\ -4)$. Докажите, что данный параллелограмм является ромбом, не находя координат вершины D. Является ли данный параллелограмм квадратом? Ответ объясните.

К-8 *Вариант 4*

1. У равнобокой трапеции боковая сторона равна 3 дм, ее большее основание, равное 7 дм, находится на расстоянии 1,8 дм от меньшего основания. Найдите меньшее основание данной трапеции.

2. У равнобокой трапеции боковая сторона и меньшее основание равны 15 дм. Диагонали трапеции образуют между собой острый угол в 60°. Найдите большее основание данной трапеции.

3. Известны координаты первых трех вершин параллелограмма $PQRS$: $P(4;\ 7)$, $Q(-2;\ 3)$ и $R(-5;\ 11)$. Докажите, что данный параллелограмм является прямоугольником, не находя координат вершины S. Является ли данный параллелограмм квадратом? Почему?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-1

Для выполнения работы применяется весь теоретический материал пунктов 51—53, что создает хорошие предпосылки для повторения и закрепления определения и свойств параллелограмма и развития у учащихся навыков по их использованию в решениях задач. На этом должен быть сделан акцент и при решении задач на построение (вторые задания), в связи с чем учащиеся при письменном оформлении решения могут опускать анализ задачи и использовать для построения линейку с делениями, угольник и транспортир.

При анализе решения задач на построение учитель должен учесть различные способы построения и соответственно разные способы обоснования.

Вар. 1. 1. Периметр параллелограмма равен 22, $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$.

Вар. 2. 1. 72°, 108°, 72°, 108°.

Вар. 3. 1. 18 см, 43 см, 18 см, 43 см.

Вар. 4. 1. $\angle A = \angle C = 70°$, $\angle B = \angle D = 110°$.

С-2

Возможны два способа решения вторых заданий в вариантах 1—3. Первый способ основан на свойстве диагонали ромба как биссектрисы его угла (остальные три угла находятся так же, как углы параллелограмма, когда известен один из его углов). Второй способ основан на свойстве перпендикулярности диагоналей ромба (наряду с их свойством как биссектрис углов ромба).

Вар. 1. 1. 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. 2. 80°, 80°, 100°, 100°.

Вар. 2. 1. 12 см, 36 см, 12 см, 36 см. 2. 70°, 70°, 110°, 110°.

Вар. 3. 1. 8 см. Указание. Воспользоваться № 43 к § 4 учебника. 2. 36°, 144°, 36°, 144°.

Вар. 4. 1. 20 см или 28 см. Указание. Надо рассмотреть два случая, так как в условии задачи не сказано, какая из частей (длиной 2 см или 6 см) прилегает к вершине *B*. 2. 60°, 60°, 120°, 120°. Указание. Диагональ, равная стороне, разбивает ромб на два равносторонних треугольника.

С-3

Кроме пункта «Теорема Фалеса», работа охватывает также и содержание пункта «Средняя линия треугольника».

Вар. 1. 2. 9 см.

Вар. 2. 2. 3,35 см.

Вар. 3. 2. 18 см.

Вар. 4. 1. Указание. Разделить искомый отрезок на 5 равных частей и провести через точки деления прямые, параллельные одной из сторон параллелограмма. 2. 14 см.

С-4

Работу целесообразно проводить после изучения всего пункта «Трапеция», включая и решение задачи 60, утверждение которой может использоваться при ее выполнении.

Вар. 1. 1. 134°, 108°. 2. 8 см.

Вар. 2. 1. 60°, 60°, 120°, 120°. 2. 12 см, 24 см.

Вар. 3. 1. 75°, 75°, 105°, 105°. 2. 12 см, 32 см.

Вар. 4. 1. $\angle B = 130°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 80°$. 2. Указание. Продолжить данный отрезок до пересечения с продолжением одной из боковых сторон трапеции и воспользоваться теоремой Фалеса.

С-5

Данная работа охватывает практически все содержание материала § 6 учебного пособия, причем примерно равноценными являются два первых и два последних ее варианта. При выполнении первых заданий (во всех вариантах) нужно давать краткие обоснования.

Вар. 1. 1. 45°, 45°, 135°, 135°. 3. 6 см, 4 см, 2 см.

Вар. 2. 1. 60°, 60°, 120°, 120°. 3. 12 см, 9 см, 6 см.

Вар. 3. 1. 45°, 45°, 135°, 135°. 3. 2 см, 4 см.

Вар. 4. 1. 45°, 45°, 135°, 135°. 3. 1 см, 3 см.

С-6

Работа является подготовительной к изучению теоремы 7.1. Цель ее — подвести учащихся к отчетливому пониманию формулировки этой теоремы. Выполняя предложенные задания, учащиеся должны сделать вывод (сами или с помощью учителя), что если у двух прямоугольных треугольников есть равные острые углы, то косинусы этих углов равны, т. е. что косинус угла не зависит от размеров треугольника. Другими словами, что косинус (острого) угла прямоугольного треугольника определяется самим углом и зависит только от градусной меры угла. Задания первого варианта самые простые $\left(\text{вычисляемое отношение близко к } \frac{1}{2}\right)$, а последнего — наиболее сложные (указанное отношение вычисляется при произвольном выборе точек B_1 и B_2). Задания этой работы могут быть предложены в качестве домашней практической работы перед изучением теоремы 7.1.

С-7

Оба задания этой работы (во всех вариантах) на применение теоремы Пифагора.

Вар. 1. 1. 17 см. 2. 4 см.

Вар. 2. 1. 42 см. 2. 35 см.

Вар. 3. 1. 25 см. 2. 5 см.

Вар. 4. 1. 15 см. 2. $4\sqrt{3}$ см.

С-8

Первые задания работы относятся к пункту «Перпендикуляр и наклонная», вторые — к пункту «Неравенство треугольника».

Вар. 1. 1. Катет BC. 2. Не может.

Вар. 2. 1. AC. 2. Не может.

Вар. 3. 1. MC. 2. Не может.

Вар. 4. 2. Указание. Записать неравенство треугольника для двух треугольников, сторонами которых являются диагонали параллелограмма, и почленно сложить их.

С-9

Непосредственно решению прямоугольных треугольников (пункт 67 учебника) посвящены вторые задания данной работы. При наличии калькуляторов или другой вычислительной техники вычисления линейных размеров в этих заданиях следует округлять до сотых, а углов — до одной минуты $\left(\frac{1}{60}\text{ градуса}\right)$. Первые задания во всех вариантах — на применение теоремы Пифагора с привлечением материала из предыдущих параграфов (свойство диагоналей ромба, свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°). При этом в последнем варианте необходимо сделать дополнительное построение — опустить высоту и провести медиану из вершины прямого угла.

Вар. 1. 1. 100 см. 2. $c \approx 8{,}83$ см, $b \approx 3{,}73$ см, $\alpha = 65°$.

Вар. 2. 1. 17 дм, 8 дм. 2. $c \approx 8{,}44$ дм, $b \approx 4{,}72$ дм, $\beta = 34°$.

Вар. 3. 1. 13 см, 5 см. 2. $a \approx 9{,}23$ см, $b \approx 11{,}82$ см, $\beta = 52°$.

Вар. 4. 1. $a(2+\sqrt{3})$. 2. $a = 5$ см, $\alpha \approx 36°52'$, $\beta \approx 53°8'$.

С-10

При выполнении заданий данной работы, кроме значений тригонометрических функций некоторых углов, используются также соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, выведенные ранее.

Вар. 1. 1. $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $BC = \frac{1}{2}$ см. 2. $\frac{3}{\sqrt{2}}$ см.

Вар. 2. 1. $AB = 6$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см. 2. 8 см, $4\sqrt{2}$ см, $4\sqrt{2}$ см.

Вар. 3. 1. $AB = 8$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см. 2. 6 см, $3\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см.

Вар. 4. 1. $\sqrt{3}$ см. Указание. Воспользоваться тем, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной около него окружности. 2. $\sqrt{3}+1$ см.

С-11

В работу включены задания на основные соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, включая теорему Пифагора и ее следствия, решение прямоугольных треугольников и другие вопросы § 7 учебника. Равноценными являются два первых и два последних варианта работы. При решении треугольников вычисление линейных размеров (сторон) следует проводить с точностью до сотых, а углов — с точностью до 1/60 градуса, т. е. до 1′. Это позволяет сосредоточить главное внимание учащихся на геометрической стороне дела.

Вар. 1. 1. Указание. Воспользоваться следствием теоремы Пифагора: у прямоугольного треугольника катет меньше гипотенузы. 2. $CB = 3$ см, $AB = 5$ см. 3. $a = 7{,}46$ см, $b = 10{,}65$ см, $\beta = 55°$.

Вар. 2. 1. См. указание к заданию 1 варианта 1. 2. $AC = 12$ см, $AB = 13$ см. 3. $b = 15{,}55$ см, $c = 20{,}92$ см, $\beta = 48°$.

Вар. 3. 1. Указание. Воспользоваться неравенством треугольника (дважды). 2. $AB = 19\frac{4}{15}$ см, $BC = 9\frac{1}{15}$ см, $AC = 17$ см. 3. $b = 17{,}55$ см, $\alpha = 12°50'$, $\beta = 77°10'$.

Вар. 4. 1. См. указание к заданию 1 варианта 3. 2. $AB = 26\frac{1}{24}$ см, $BC = 25$ см, $AC = 7\frac{7}{24}$ см. 3. $c = 11{,}18$ см, $\alpha = 26°34'$, $\beta = 63°26'$.

С-12

Как и в учебнике, рассуждения, касающиеся связи между понятиями параллельности и перпендикулярности прямых, могут проводиться теперь в свернутом виде. Тем более что это необходимо для создания благоприятных условий для изучения нового материала темы «Декартовы координаты на плоскости». Сделанное замечание имеет прямое отношение и к данной работе, особенно к ее первым заданиям.

Вар. 1. 2. $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$.

Вар. 2. 1. 2 (расстояние до оси x равно абсолютной величине ординаты). 2. $(2;\ -2)$.

Вар. 3. 1. 2 (расстояние до оси y равно абсолютной величине абсциссы). 2. $(-1;\ 2)$.

Вар. 4. 1. Указание. См. решение задачи 9 к § 8 учебника. 2. $(2;\ -4)$. Указание. См. решение задачи 15 к § 8 учебника.

С-13

Формула расстояния между двумя точками является основой при выводе уравнений окружности и прямой, чем и объясняется компоновка пунктов учебника для данной работы. Проводить ее целесообразно после изучения пункта «Координаты точки пересечения прямых».

Вар. 1. 1. $\sqrt{26}$. 2. $(0;\ 3)$ и $(0;\ -3)$.

Вар. 2. 1. $(x+1)^2+(y-4)^2=16$. 2. $\left(1\frac{5}{7};\ 1\frac{13}{14}\right)$.

Вар. 3. 1. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$. 2. $\left(\frac{13}{15};\ -2\frac{2}{5}\right)$.

Вар. 4. 1. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Указание. Обратите внимание на то, что данные точки являются вершинами прямоугольного треугольника, для которого положение центра описанной окружности известно. 2. $3x+5y+4=0$. Указание. См. решение задачи 35 в учебнике (с. 105).

С-14

При выяснении особенностей в расположении прямой относительно осей координат рассматриваются все возможные случаи обращения в нуль коэффициентов в ее уравнении $ax+by+c=0$. Это обстоятельство и служит основанием для того, чтобы сразу (без вывода) записывать вид уравнения прямой, если известны особенности в ее расположении относительно системы координат (прямая параллельна оси x, оси y или проходит через начало координат). Точно так же при исследовании вопроса о пересечении прямой с окружностью рассматриваются все возможные случаи соотношений между радиусом окружности R и расстоянием d от ее центра до прямой ($R>d$, $R=d$, $R<d$). Значит, если соотношение между R и d известно, то можно сделать соответствующее заключение о взаимном расположении прямой и окружности, и обратно, если задано взаимное расположение прямой и окружности, то можно сделать вывод о соотношении между R и d. Из этого и следует исходить при выполнении заданий данной работы. В случае затруднений учащиеся могут по необходимости прибегать к аналитическому решению поставленного вопроса.

Вар. 1. **1.** $x=-1$. **2.** Окружность и прямая касаются ($R=6$, $d=6$).

Вар. 2. 1. $y=-3$. **2.** Не пересекает ($R=1$, $d=2$).

Вар. 3. 1. $x+2y=0$. **2.** Не пересекает ($R=2$, $d=3$).

Вар. 4. 1. 45° и 135°. Указание. Найти угловой коэффициент данной прямой. **2.** Указание. Чтобы сравнить R и d, нужно воспользоваться свойством перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки к прямой.

С-15

Работа выполняется после изучения пункта 81.

Основные тригонометрические тождества выводятся в учебнике (п. 68) для углов в прямоугольном треугольнике, т. е. для острых углов. Однако поскольку в эти тождества синус, косинус и тангенс входят во второй степени, а значения тригонометрических функций для острых и тупых углов, составляющих в сумме 180°, могут отличаться только знаком (п. 81), то они остаются справедливыми для любых углов от 0 до 180°. Поэтому ими можно пользоваться при выполнении заданий данной работы без особых обоснований.

Вар. 1. **1.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$. **2.** $\cos\alpha=-0{,}6$.

Вар. 2. **1.** $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\sin\alpha=\frac{15}{17}$.

Вар. 3. 1. $-\sqrt{3}$, -1, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$.

Вар. 4. **1.** Не может. **2.** $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{40}{9}$.

С-16

Работа охватывает практически все содержание учебного материала § 8 учебника, причем два первых и два последних ее варианта являются примерно равноценными. Выполняя ее, учащиеся должны шире использовать геометрические соображения, а не увлекаться аналитическими выкладками, которые могут оказаться для них затруднительными.

Вар. 1. 1. $AD=5$, $3x+4y-2=0$. **2.** $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. **3.** Указание. Воспользоваться теоремой, доказанной в п. 81.

Вар. 2. **1.** $BD=2$, $y-2=0$. **2.** $(x-12)^2+(y-5)^2=169$. **3.** Указание. Воспользоваться теоремой, доказанной в п. 81.

Вар. 3. 1. $B_1C_1=5$, $3x+4y=0$. **2.** $(x+2)^2+(y\pm 2)^2=4$. Указание. Диаметр окружности равен расстоянию между осью y и параллельной ей прямой $x=-4$, а центр находится на биссектрисе второй или третьей четверти. **3.** Указание. Найти расстояние от центра данной окружности до прямой $y=3$.

Вар. 4. **1.** $A_1B_1=5$, $4x-3y=0$. **2.** $(x\pm 3)^2+(y-3)^2=9$. Указание. Диаметр окружности равен расстоянию между осью x и параллельной ей прямой $y=6$, а центр находится на биссектрисе первой или второй четверти. **3.** См. указание к заданию 3 варианта 3.

С-17

Первые задания во всех вариантах посвящены отработке навыка построения точки, симметричной данной, относительно другой данной точки. При выполнении вторых заданий используются свойства движения (п. 83 учебника).

С-18

Первое задание работы касается построения точек, симметричных данным относительно данной прямой, второе — числа осей симметрии у некоторых геометрических фигур.

Вар. 1. **2.** Одна (прямая, содержащая данный луч).

Вар. 2. **2.** Четыре.

Вар. 3. **2.** Две.

Вар. 4. **2.** Может, если он является прямоугольником или ромбом.

С-19

Все задания данной работы, за исключением последнего задания варианта 4, дублируют № 28—31 к § 9 учебника.

Вар. 1. **1.** $(3;\ -1)$, $(1;\ -1)$. **2.** $a=1$, $b=1$.

Вар. 2. **1.** $(-2;\ 3)$, $(-1;\ -2)$. **2.** Не существует.

Вар. 3. **1.** $(-2;\ -3)$, $(1;\ -2)$. **2.** Существует.

Вар. 4. **1.** $(1;\ 0)$, $(3;\ -1)$. **2.** $x''=x+1$, $y''=y-1$.

С-20

Работа охватывает следующие вопросы, изучаемые в § 9: движение и его свойства, симметрия относительно точки и прямой, параллельный перенос. Обоснования требуются только при выполнении первых заданий.

Вар. 1. **1.** Указание. Воспользоваться теоремой 6.1. **3.** Существует.

Вар. 2. **1.** Указание. Докажите сначала, что четырехугольник является параллелограммом (по теореме 6.1). **3.** $a=-2$, $b=-2$.

Вар. 3. **1.** Указание. Воспользоваться тем, что симметрия относительно точки является движением. **3.** $(-8;\ 10)$.

Вар. 4. **1.** Указание. Доказательство проведите способом от противного. **3.** Не существует.

С-21

При выполнении вторых заданий учащиеся пользуются определениями суммы и разности двух векторов, а при выполнении третьих — правилами треугольника и параллелограмма. Причем правилом треугольника они могут пользоваться и для нахождения разности двух векторов по способу, указанному в решении задачи 11 (см. п. 94 учебника).

Вар. 1. **2.** $\overline{a}+\overline{b}=\overline{c}\ (2;\ 2)$, $\overline{a}-\overline{b}=\overline{d}\ (0;\ -2)$. **3.** $\overline{CA}=\overline{CB}+\overline{CD}$, $\overline{DB}=\overline{CB}-\overline{CD}$.

Вар. 2. 2. $\overline{a}-\overline{b}=\overline{d}$ (0; −2), $\overline{b}+\overline{c}=\overline{e}$ (2; 5). 3. $\overline{BD}=-\overline{AB}-\overline{CB}$, $\overline{CA}=$ $=\overline{CB}-\overline{AB}$.

Вар. 3. 2. $\overline{b}-\overline{a}=\overline{d}$ (0; −2), $\overline{c}+\overline{b}=\overline{e}$ (−2; 3). 3. $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$, $\overline{AC}=$ $=\overline{AB}+\overline{AD}$.

Вар. 4. 1. $\overline{a}\parallel l$, бесконечное множество. 2. $(\overline{a}-\overline{b})+\overline{c}=\overline{d}$ (−2; 0). 3. $\overline{AB}=\overline{AO}-\overline{BO}$, $\overline{DA}=\overline{AO}+\overline{BO}$.

С-22

Наряду с умножением вектора на число при выполнении заданий этой самостоятельной работы используются введенные ранее операции сложения и вычитания векторов, а также формулы для абсолютной величины вектора.

Вар. 1. 1. $|3\overline{a}|=5$. 2. $2\overline{c}+3\overline{a}=\overline{(1;\ 6)}$. 3. $\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AD}$.

Вар. 2. 1. $|\overline{b}|=13$, $\overline{e}\left(\frac{5}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$. 2. $2\overline{c}-3\overline{a}=\overline{(2;\ 5)}$. 3. $\overline{DO}=\frac{1}{2}\overline{AB}-$ $-\frac{1}{2}\overline{AD}$.

Вар. 3. 1. $|\overline{c}|=13$, $\overline{c}\left(-\frac{5}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$. 2. $3\overline{m}+2\overline{n}=\overline{(-4;\ -1)}$. 3. $\overline{OA}=$ $=-\frac{1}{2}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{BC}$.

Вар. 4. 1. $\frac{1}{3}\overline{k}+\frac{1}{2}\overline{c}=\overline{\left(-\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)}$. 2. $\overline{MK}=\frac{1}{2}\overline{CB}-\frac{1}{2}\overline{CD}$.

С-23

Самостоятельная работа охватывает весь круг вопросов, связанных со скалярным произведением векторов. При выполнении первых заданий вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, и находится угол (φ) или косинус угла между ними (варианты 1—3), применяется теорема 10.3 (вариант 4). Вторые задания посвящены условию перпендикулярности векторов.

Вар. 1. 1. $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}}$. 2. $n=\frac{4}{3}$.

Вар. 2. 1. $\varphi\approx 97°8'$, $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{65}}$. 2. $\lambda=-\frac{17}{5}$.

Вар. 3. 1. $\varphi\approx 53°8'$, $\cos\varphi=0{,}6$. 2. $\lambda=-\frac{5}{13}$.

Вар. 4. 1. $MC=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Выразить вектор $\overline{CM}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ и возвести обе части полученного векторного равенства в квадрат. 2. $\varphi=120°$. Указание. $\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$.

С-24

Данная работа дублирует в некоторой степени предшествующие три работы, что дает более широкие возможности для организации самостоятельной работы учащихся. В частности, некоторые из предшествующих работ могут не проводиться в случае планирования данной работы. Не исключено при необходимости и использование всех самостоятельных работ по теме. Кроме того, настоящая работа может оказаться полезной при подготовке к контрольной работе. По усмотрению учителя объем ее заданий может быть уменьшен.

Вар. 1. 1. а) $\overline{AC}$; б) $\overline{BD}$; в) $2\overline{AB}$. 2. 120°.

Вар. 2. **1.** а) $\overline{MP}$; б) $\overline{MP}$; в) $2\overline{MN}$. **2.** $\angle Q = 45°$.

Вар. 3. **1.** а) $\overline{EK}$; б) $\overline{FL}$; в) $2\overline{FK}$. **2.** $\angle F = 60°$.

Вар. 4. **1.** Указание. Воспользоваться правилом треугольника для нахождения суммы векторов и правилом нахождения разности векторов. **2.** $\angle B = 45°$, $\angle A = 90°$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Д-1. Указание. Для построения четвертой вершины параллелограмма можно воспользоваться определением параллелограмма, его признаком (теорема 6.1) или утверждением задачи 18 из § 6, выражающим другой признак параллелограмма (по равенству и параллельности одной пары противолежащих сторон). Что касается единственности (дополнительный вопрос), то она вытекает из определения параллелограмма и аксиомы параллельных. При этом следует учитывать также и принятый способ обозначения, посредством чего задаются в задаче стороны параллелограмма (в отличие от сходной с нею по содержанию задачи 3 к § 6).

Д-2. Указание. Для доказательства достаточно установить, что все углы данного ромба прямые. Это можно сделать различными способами. Можно воспользоваться и более общим утверждением задачи 26 к § 6, если учащийся, конечно, знает его.

Д-3. Указание. Утверждение 1 следует из того, что $CD \parallel AB$. Утверждение 2 доказывается способом от противного: если точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD, то отрезки AD и BC пересекаются (см. задачу 4 к § 4 учебника), что противоречит определению четырехугольника. Утверждение 3 также доказывается способом от противного. При этом утверждение 1, например, используется для установления того, что углы BAC и BAD отложены от полупрямой AB в одну полуплоскость, а утверждение 2 — для получения противоречия с предположением. В результате доказательства утверждения 3 снова возникает уже настоящая ситуация задачи 4 (для параллельных прямых AB и CD и прямой AC, относительно которой точки B и D лежат в разных полуплоскостях). Чтобы облегчить учащимся выполнение этого задания, часть указаний дается в самом задании. В случае необходимости отдельным учащимся можно оказать дополнительную помощь.

Д-4. Можно. Указание. Если точка C_1 лежит на отрезке AC, как показано на рис. 138 в учебнике, то

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{AC_1 + C_1C}{AC_1} = 1 + \frac{C_1C}{AC_1},$$

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AB_1 + B_1B}{AB_1} = 1 + \frac{B_1B}{AB_1}.$$

А значит, из равенства $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}$ (теорема 6.9) следует равенство $\frac{C_1C}{AC_1} = \frac{B_1B}{AB_1}$, или $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{C_1C}{B_1B}$, т. е. что отрезки AC_1 и CC_1 пропорциональны отрезкам AB_1 и B_1B и наоборот. Аналогичное утверждение справедливо и в случае произвольного числа отрезков (дополнительный вопрос).

Д-5. Указание. Для доказательства утверждения 3 воспользоваться свойствами перпендикуляра и наклонных (утверждения 1 и 2). Последнее утверждение обосновывается с помощью предыдущего, для чего одна из данных точек соединяется отрезком с вершиной треугольника, лежащей против стороны, которой она принадлежит. В основу задания положена тема задач 19—20 к § 7.

Д-6. Указание. Выполнение задания связано в основном с понятием синуса острого угла в прямоугольном треугольнике, чем и объясняется его название. Причем применяется оно точно так же, как понятие косинуса угла в доказательстве теоремы Пифагора (см. учебник, п. 63). А именно: синус какого-нибудь угла находится двумя способами (из двух прямоугольных треугольников) и оба его выражения приравниваются. Для того чтобы найти радиус окружности, вписанной в ромб, необходимо сначала определить и обосновать место ее центра, воспользовавшись свойством диагоналей ромба. 2. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 3. $\frac{3}{2}a$. 4. $2{,}4a$.

Д-7. Указание. Для решения задачи достаточно выразить косинус угла, образованного диагоналями трапеции с ее основаниями, из двух прямоугольных треугольников. Другое решение можно получить, воспользовавшись соображениями, которые применялись при решении задачи 64 из § 6 учебника, и утверждением задачи 43 к § 4.

Д-8. Указание. Для решения первых двух упражнений воспользоваться утверждением задачи 41 (§ 7). Второе упражнение можно также решить и с помощью № 43 (§ 7) непосредственно. Для решения последних двух упражнений воспользоваться теоремой 7.3 (неравенство треугольника). Решение третьего упражнения можно упростить с помощью утверждения № 25 (§ 7), представляющего собой следствие теоремы 7.3. Касание окружностей в четвертом упражнении может быть и внутренним, и внешним (см. п. 40 учебника).

Д-9. Указание. Все части задания являются, по существу, этапами доказательства его последнего утверждения. Чтобы доказать, что данный четырехугольник есть квадрат, устанавливают сначала, что он является параллелограммом (диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам); затем — что параллелограмм является ромбом (стороны равны); и наконец — что ромб является квадратом (диагонали ромба равны). Впрочем, возможна и несколько другая последовательность логических шагов: четырехугольник, параллелограмм, прямоугольник, квадрат.

Д-10. Указание. Для доказательства обоих утверждений можно или рассмотреть соответствующую систему уравнений, или воспользоваться выводами п. 80 учебника «Пересечение прямой с окружностью».

Д-11. Указание. Доказательство всех утверждений задания опирается на то, что при движении прямая переходит в прямую, а отрезок — в отрезок. Поэтому и вершина переходит в вершину (как точка пересечения двух прямых). Утверждение 3 доказывается с помощью признака параллелограмма (теорема 6.1). Для доказательства утверждения 4 следует установить, что оси фигуры пересекаются под прямым углом (при симметрии относительно одной оси вторая ось должна переходить в себя, так как других осей симметрии по условию у фигуры нет), после чего можно выбрать их за оси координат и показать, что начало координат является центром симметрии данной фигуры.

Д-12. Указание. Все решения и доказательства получаются с помощью свойств параллельного переноса, непосредственно следующих из его определения (см. учебник, п. 87). При этом само определение и формулы параллельного переноса не используются. Поэтому все рассуждения при выполнении данных упражнений носят чисто геометрический характер. При решении первого упражнения используется свойство параллельного переноса как движения вообще, второго — присущее только ему свойство смещения точек вдоль параллельных прямых. Для доказательства третьего утверждения используются все геометрические свойства параллельного переноса (сначала надо доказать, что получившийся четырехугольник — параллелограмм). Для доказательства четвертого утверждения надо воспользоваться тем, что при параллельном переносе сохраняются параллельность прямых и углы (потому что параллельный перенос — движение).

Д-13. Указание. Первые два упражнения на откладывание вектора, равного данному, от данной точки, причем первое из них носит геометрический характер (надо построить соответствующий параллелограмм, см. решение № 2 к § 10), а второе — алгебраический, координатный (координаты конца искомого вектора надо вычислить, применив теорему п. 93). Доказательство третьего утверждения проводится аналогично тому, как в учебнике доказывается свойство транзитивности для одинаково направленных полупрямых (п. 89). Для доказательства четвертого утверждения надо, пользуясь свойствами параллельного переноса, установить сначала, что $AB=CD$ и прямые AB и CD параллельны (или совпадают). Затем выполнить параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку C, и обосновать с помощью уже доказанного, что при этом точка B совместится с точкой D, т. е. что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны (по определению).

Д-14. Указание. Доказательства, о которых идет речь в задании, получаются одно с помощью правила треугольника (теорема 10.1), а другое с помощью правила параллелограмма, но в последнем случае надо сделать дополнительное построение (продолжить вектор $\overline{OM}$ на его длину, дополнив $\triangle OAB$ до параллелограмма). Для решения дополнительного задания следует воспользоваться свойством диагоналей параллелограмма и доказанным векторным равенством.

Д-15. $A_1B_1:A_1A_2=\frac{\sqrt{3}+1}{1}$. Указание. Чтобы доказать, что $B_1B_2B_3B_4$ — квадрат, надо установить, что все его стороны равны, а углы прямые. Сделать это можно с помощью признаков равенства треугольников (первое решение). То же самое можно сделать и с помощью векторов, для чего надо выразить, например, векторы $\overline{B_1B_2}$ и $\overline{B_2B_3}$ через векторы $\overline{B_1A_1}$, $\overline{A_1B_2}$ и $\overline{B_2A_2}$, $\overline{A_2B_3}$ соответственно по правилу треугольника. А затем найти их модули и скалярное произведение. Для решения дополнительного задания следует воспользоваться теоремой 10.3, предварительно выразив косинус угла между векторами $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{B_1B_3}$ через их длины и скалярное произведение (последнее можно найти указанным выше способом).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

1. Воспользоваться теоремой 6.1.

2. Воспользоваться признаком параллельности прямых (теорема 4.2).

3. Три решения: 14 см, 10 см, 12 см.

4. Три решения: 18 см, 20 см, 22 см.

5. Доказать, что периметр получившегося параллелограмма равен сумме длин боковых сторон данного равнобедренного треугольника. См. также № 4 к § 6 учебного пособия.

6. 10 см.

7. а) 16 см, 44 см; б) два решения: 3 см, 32 см или 23 см, 72 см.

8. $2(2a+b)$ или $2(2b+a)$.

9. а) 8 см; б) 45° и 90°.

10. Построить сначала прямоугольный треугольник по катету, равному 2 см, и гипотенузе, равной 5 см (см. № 35 к § 5 учебника).

11. Если данный угол тупой, то задача может иметь не более одного решения, а если острый, то одно, два или ни одного решения.

12. Если заданы диагональ AC и угол B (рис. 9), то сначала надо построить $\triangle ACE$, у которого AE равно полупериметру параллелограмма, а $\angle E = \frac{1}{2}\angle B$. При построении $\triangle ACE$ можно воспользоваться соображениями, которые применялись при решении № 46 к § 5 учебника. Другое решение использует задачу 5.

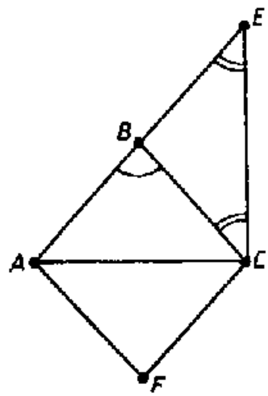


Рис. 9

13. Сначала постройте вспомогательный треугольник, как в задаче 12 (по стороне, полусумме диагоналей и углу, противоположному данной стороне).

14. Можно воспользоваться теоремой 6.1 или утверждением задачи № 18 к § 6, решенной в учебнике.

16. $AC \parallel BD$ (см. рис. 1), $\triangle BOD = \triangle AOC$, откуда $AC = BD$, следовательно, $ABDC$ — параллелограмм; значит, $AB = CD$.

17. $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$.

18. Воспользоваться результатом № 6 к § 6 учебника.

19. Треугольники AEH и CFG равны по первому признаку. Значит, $\angle AHE + \angle CFG = 180° - \angle A$. Далее, $\angle EHF + \angle GFH = (180° - \angle AHE - \angle DHF) + (180° - \angle CFG - \angle DFH) = 360° - (\angle AHE + \angle CFG) -$

$-(\angle DFH+\angle DHF)=\angle A+\angle D=180°$. Поэтому $EH \parallel GF$. Точно так же $GE \parallel FH$.

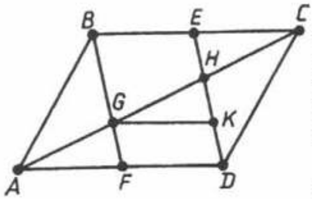


Рис. 10

20. Проведем через точку G прямую, параллельную BC (рис. 10). Она пересекает прямую ED в некоторой точке K, так как $ED \parallel BF$ (см. № 17 к § 6 учебника). Треугольники AGF, GHK и CHE равны (по второму признаку). Значит, $AG=GH=HC$.

21. В приведенном доказательстве теоремы 6.2 используется свойство противолежащих сторон параллелограмма, утверждаемое теоремой 6.3, которая доказывается с помощью теоремы 6.2 (откройте учебник и убедитесь в этом). Получается, что теорема 6.2 доказывается с помощью теоремы 6.3, а теорема 6.3 — с помощью теоремы 6.2, что недопустимо. Логические ошибки такого рода называются порочным кругом.

22. Если $AB=BC$, то требуемое утверждение следует из утверждения № 36 к § 6 учебника. Пусть $AB \neq BC$. Проведем диагональ AC. Треугольники BAC и DCA равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует, что $\angle BAC=\angle DCA$, $\angle BCA=\angle DAC$. По предположению $\angle BAC \neq \angle DAC$. Пусть для определенности $\angle DAC$ меньше $\angle BAC$. Тогда если допустить, что точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то лучи AD и CB пересекаются (см. дополнительную задачу № 62, 1 в дидактических материалах для 7 класса). А так как $\angle DAC$ меньше $\angle BAC$, то точка их пересечения принадлежит отрезку BC (по свойству измерения углов) и отрезку AD по той же причине ($\angle BCA$ меньше $\angle DCA$). То есть стороны BC и AD данной фигуры $ABCD$ пересекаются, и, значит, она не является четырехугольником по определению (см. п. 50 учебника). Отсюда следует, что точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Поэтому из равенства углов BAC и DCA следует $AB \parallel CD$, а из равенства углов BCA и DAC — $BC \parallel AD$. И значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

23. Доказать сначала, что данный четырехугольник является параллелограммом.

26. Построить сначала равнобедренный треугольник по основанию (данная сторона) и углу при нем (равному половине угла, смежного с данным).

27. Если на продолжении стороны AB прямоугольника $ABCD$ отложить отрезок $BE=BC$, то у треугольника AEC известны: сторона AC (диагональ прямоугольника), сторона AE (равная полупериметру прямоугольника) и угол AEC $\left(\angle AEC=\frac{1}{2}\angle ABC=45°\right)$. Треугольник AEC по этим данным можно построить.

28. Измерить и сравнить диагонали.

29. Обозначим $AD=BC=x$; $DC=AB=x+250$. Из условия задачи $\frac{x+250}{x}=\frac{16}{11}$, откуда $x=550$, $x+250=800$.

Периметр прямоугольника: $2\cdot(800+550)=2700$ м. Скорость сторожа: 4 км/ч $=\frac{200}{3}$ м/мин. Время, за которое сторож может обойти по краю весь участок:

$$2700:\frac{200}{3}=40{,}5 \text{ мин.}$$

30. При нерациональном раскрое на изготовление каждой детали расходуется 175 пог. м стандартной стальной полосы. При рациональном раскрое заготовки соответствующим образом переставляются (см. рис. 3), в результате чего достигается экономия $A_1K = x$ пог. м на каждую пару. Определим x: $A_1K = x = A_1P - KP = 175 - KP$; $KP = DC_1 + C_1D_1$; $C_1D_1 = 60$ м, $DC_1 = CD = 60$ м. Следовательно, $PK = DC_1 + C_1D_1 = 60 + 60 = 120$ м, а значит, $A_1K = 55$ м.

Отсюда заключаем, что при изготовлении 200 деталей мы сэкономили $55 \cdot 100 = 5{,}5$ пог. м стандартной стальной полосы.

31. 80° и 100°.

32. 60° и 120°.

33. 30° и 150°.

34. С помощью теоремы 6.1 сначала доказать, что получившийся четырехугольник — параллелограмм.

39. При решении использовать свойство диагоналей ромба: «Каждая диагональ ромба является биссектрисой углов».

40. Если на продолжении полудиагонали AO ромба $ABCD$ отложить отрезок $OM = OB$, то у треугольника ABM будут известны: сторона AM, равная полусумме диагоналей, угол BAM, равный половине угла ромба при вершине A, и угол AMB, который равен половине угла, под которым пересекаются диагонали ромба, т. е. 45°. Треугольник ABM по этим данным можно построить.

41. Квадрат.

44. Построить сначала равнобедренный прямоугольный треугольник, периметр которого равняется данной полусумме. Для этого следует воспользоваться соотношениями, которые применялись при решении № 39 к § 4 учебника.

45. Недостаточно, так как равные отрезки могут пересекаться под прямым углом не обязательно в середине каждого из них.

46. Так как образующиеся треугольники оба раза точно совмещаются, то диагонали данного четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, данный четырехугольник — параллелограмм. Его стороны равны между собой, значит, он ромб. Но о диагоналях четырехугольника по результатам данной проверки ничего сказать нельзя. Поэтому, является ли данный четырехугольник квадратом, окончательного вывода сделать невозможно.

47. На ширине листа поместится $300 : 60 = 5$ шайб. Нам нужно будет $50 : 5 = 10$ рядов. Длина листа должна быть: $60 \cdot 10 = 600$ мм.

48. Надо отметить равные отрезки AD, AB и BC (рис. 11), потом обрезать по диагонали квадрата $ABCD$. Ясно, что $\angle ABD = \angle ADB = 45°$.

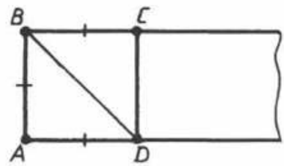


Рис. 11

49. Легко видеть, что для составления квадрата потребуется не менее 7 палочек, поэтому нельзя составить квадрат со стороной менее 7 см. С другой стороны, сумма длин всех палочек равна 45 см, поэтому из них нельзя составить квадрат со стороной более 11 см. Из палочек данного набора можно составить отрезки длиной в 7, 8, 9, 10 и 11 см следующими способами:

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3,$
$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3,$
$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4,$

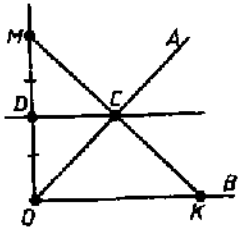


Рис. 12

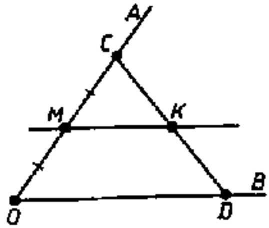


Рис. 13

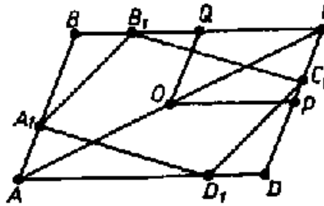


Рис. 14

$10=9+1=8+2=7+3=6+4,$
$11=9+2=8+3=7+4=6+5.$

Следовательно, из данного набора палочек можно сложить одним способом квадраты со сторонами 7 см, 8 см, пятью способами — квадраты со сторонами 9 см, 10 см и 11 см.

51. Одно из возможных построений указано на рисунке 12, где $MD=DO$ и $DC \parallel OK$.

52. Одно из возможных построений указано на рисунке 13, где $KM \parallel OD$ и $OM=MC$.

53. Середины противолежащих сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма (см. № 55 к § 6 учебника).

54. Пусть вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 14). Проведем диагональ AC. Середина этой диагонали (точка O) является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (теорема 6.2). Средняя линия OP треугольника ACD, проходящая через середины сторон AC и CD, параллельна AD по теореме 6.7 и BC по теореме 4.1. Значит, прямая OP пересекает диагональ B_1D_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ в ее середине, т. е. точка пересечения диагоналей второго параллелограмма лежит на прямой OP (теорема 6.6). Точно так же доказывается, что она лежит и на прямой OQ (средней линии $\triangle ACB$). А так как прямые OP и OQ пересекаются в точке O, то эта точка и есть точка пересечения диагоналей параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, что и требовалось доказать.

55. 1) Провешиваем базис CD и прямые BC и AD (рис. 15, *а*). Находим точку M — середину CD и проводим $MN \parallel BD$ и $MF \parallel AD$. Очевидно, что точки F и N являются серединами сторон AC и BC, следовательно, FN есть средняя линия треугольника ABC и $AB=2NF$.

2) Через взятую на местности точку O провешиваем прямую CD и через точки A и B проводим перпендикуляры $AM \perp CD$, $BN \perp CD$ (рис. 15, *б*). Через середины отрезков OM и ON проводим перпендикуляры к этим отрезкам и находим точки P и Q — середины сторон AO и BO. Так как PQ есть средняя линия треугольника AOB, то $AB=2PQ$.

56. Выбрав точку C, находим середину D стороны BC (рис. 16, *а*). Проводим $DE \parallel AB$, тогда $AB=2DE$. Второе решение получим, если проведем $DE \parallel AC$, тогда $AB=2BE$ (рис. 16, *б*).

57. Разделить пополам сторону, соединяющую доступные вершины A и B, и через середину K провести прямую, параллельную стороне AC. Отметить точку M пересечения прямой со стороной BC.

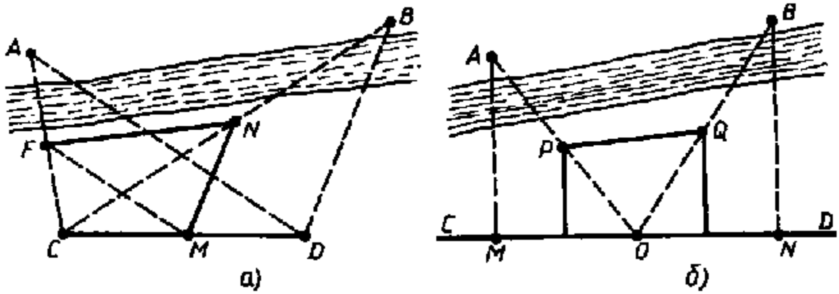


Рис. 15

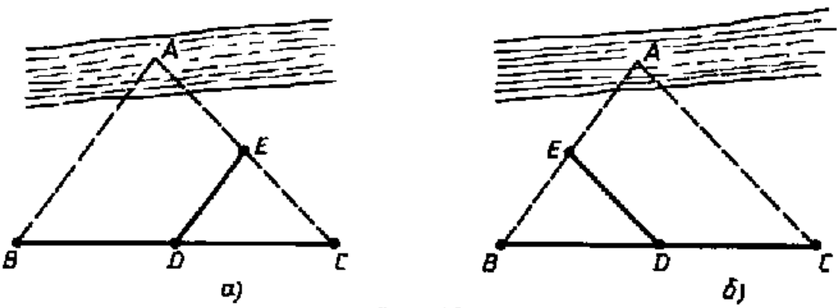


Рис. 16

Тогда $P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + 2BM + 2KM$. Отрезки KM и BM можно измерить.

58. 20 см.

59. 140°, 80°, 100°.

60. 42 см.

62. Воспользоваться № 60 к § 6 учебника.

63. Воспользоваться свойством параллельных прямых как равноотстоящих (см. № 50 к § 4 учебника).

64. Воспользоваться утверждением предыдущей задачи.

65. Середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами параллелограмма (см. № 55 к § 6 учебника). Равенство сторон его следует из равенства углов при основании равнобокой трапеции (см. № 53 к § 6 учебника).

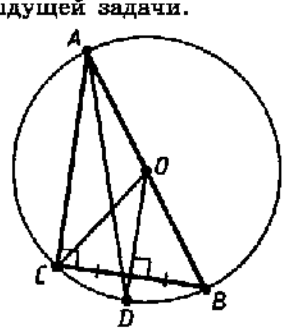


Рис. 17

66. $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ см.

67. $2\sqrt{3} \approx 3{,}4$ дм.

68. 4 см и 3 см.

69. 6,8 см, 6,8 см и 6,4 см.

70. $1\frac{2}{3}$ см, $4\frac{1}{3}$ см.

71. 9 м, 12 м, 15 м.

72. 6 м и 8 м.

73. Указание. Выразить синус одного из острых углов данного прямоугольного треугольника через его стороны и стороны другого треугольника, одним из катетов которого является данная высота.

74. 28 см. Указание. Сначала найти основания. Меньшей является та боковая сторона трапеции, которая перпендикулярна основаниям. Обосновать это можно с помощью свойства перпендикуляра и наклонной, проведенных к прямой из одной и той же точки.

75. В приведенном рассуждении все утверждения обоснованы, за исключением двух. А именно: не доказано, что точка Q лежит между точками A и B, а точка R — между точками A и C (факты эти взяты из рисунка). Одно из этих утверждений ошибочно. В самом деле, посмотрите на рисунок 17. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы — точка O. По теореме 5.3 серединный перпендикуляр к катету также проходит через точку O. Пусть D — точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью, лежащая на луче, проходящем между сторонами угла BOC. Тогда $\angle BOD = \angle COD$, и, значит, по свойству вписанных углов $\angle BAD = \angle CAD$, т. е. AD — биссектриса угла BAC. Отсюда следует, что рисунок 6, на основе которого проводились рассуждения, неправилен. Он и явился источником допущенной ошибки. Пример этот свидетельствует о правомерности одного из требований к доказательству теорем: «Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и теоремы, доказанные ранее» (см. учебник, с. 14).

76. Обозначим искомое расстояние через x, тогда $x = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{20{,}2^2 - 18{,}62^2} = \sqrt{61{,}3} \approx 7{,}8$ м.

77. $AB = 120$ м, $AK = BE = 500$ м, $AD = 2800$ м. Из $\triangle AKD$ следует, что $DK = 2755$ м (рис. 18), $DC = 2 \cdot 2755 + 120 = 5630$ м.

78. $\triangle CMF$ прямоугольный (рис. 19), так как $\angle CMF = 90^\circ$ и $MB \perp CF$; следовательно, $MB^2 = BF \cdot BC$, но $MB = \frac{1}{2}$, $BC = h$, а $BF = D - h$, тогда получим, что $\frac{l^2}{4} = (D - h)h$, или $\frac{l^2}{4} + h^2 = Dh$, откуда $D = h + \frac{l^2}{4h}$.

79. Из $\triangle ADB$ (см. рис. 7) следует, что $BD = h = \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{225}{4}} = 4$ м, $AE = ER = RB = \frac{17}{6}$ м.

$AF = FQ = QD = DQ_1 = Q_1F_1 = F_1C = \frac{15}{6}$ м, $AQ = 5$ м, $AR = \frac{17}{3}$ м. Из $\triangle EFA$ следует, что $EF = \sqrt{\frac{289}{36} - \frac{225}{36}} = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$ м. Из $\triangle RQA$ следует, что $RQ = \sqrt{\frac{289}{9} - 25} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ м.

80. Из прямоугольного треугольника ABO (рис. 20) следует, что $AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} \approx 2072$ км.

81. По условию задачи $AB = 79{,}5$ м. $\angle AHB = 20^\circ 45'$, $\angle AHC = 63^\circ 30'$. В $\triangle BAH$ $AH = \frac{AB}{\operatorname{tg} 20^\circ 45'} \approx 209{,}8$ м. В $\triangle CAH$ $AC = AH \times \operatorname{tg} 63^\circ 30' \approx 421$ м.

82. Из $\triangle ACB$ (рис. 21) $\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \approx 0{,}0170$, откуда $\alpha \approx 59'$.

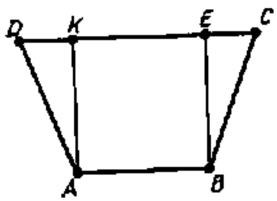


Рис. 18

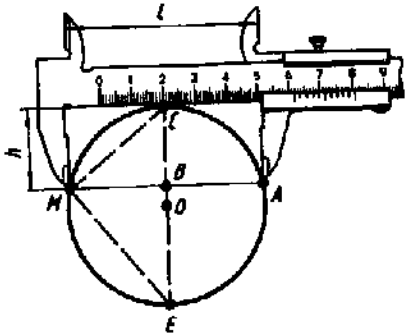


Рис. 19

83. Радиус BD действия крана (см. рис. 8) можно вычислить из прямоугольного треугольника BCD: $BD=BC\cos CBD=9\cos 26^\circ\approx\approx 8{,}09$ м.

84. Предположим, что катер выходит под углом α к первоначальному направлению крейсера и через x ч встретится с крейсером, тогда $BC=36\cdot x$ (рис. 22). $AC=54\cdot x$. Из прямоугольного треугольника ABC $\sin\alpha=\frac{36x}{54x}\approx 0{,}6667$, откуда $\alpha\approx 41^\circ 48'$.

85. Глубина станции $AO=20$ см $\cdot\, 170=3400$ см $=34$ м (рис. 23). Из $\triangle ADC$ $AC=\sqrt{1600+400}\approx 44{,}72$ см. Длина лестницы $AB=170\cdot AC=170\cdot 44{,}72=7602$ см ≈ 76 м. Из прямоугольного треугольника AOB $\sin\alpha=\frac{AO}{AB}$, или $\sin\alpha=\frac{34}{76}=0{,}4474$, откуда $\alpha\approx 26^\circ 34'$.

86. Из $\triangle ACB$ (см. рис. 21) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{20}{800}=0{,}025$, откуда $\alpha\approx 1^\circ 26'$.

Самолету следует подниматься под углом, который больше $1^\circ 26'$.

87. По условию задачи подъем ступени $BC=15{,}5$ см, а ее ширина $AC=32{,}5$ см (см. рис. 21). Требуется определить $\angle CAB=\alpha$. Из прямоугольного треугольника ACB $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}\approx 0{,}4769$, откуда $\alpha\approx 25^\circ 30'$.

88. В $\triangle ABC$ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{a}$ (см. рис. 21), откуда $x=a\operatorname{tg}\alpha$.

89. В $\triangle ABC$ (см. рис. 21) $BC=x=AC\operatorname{tg}\alpha=1200\cdot\operatorname{tg}25^\circ 17'\approx 567$ м, $AB=y=\frac{AC}{\cos\alpha}\approx 1327$ м.

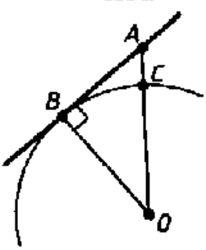


Рис. 20

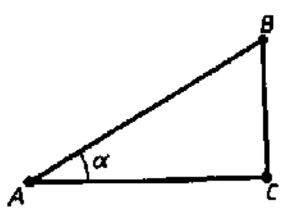


Рис. 21

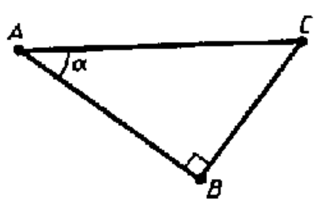


Рис. 22

90. а) $2\sin^2\alpha$; б) 1; в) $1-\mathrm{ctg}^2\alpha$; г) $1-\mathrm{tg}^2\alpha$; д) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; е) $1-\mathrm{ctg}^2\alpha$; ж) $1+\mathrm{ctg}^6\alpha$.

91. а) Квадрат; б) параллелограмм (но не ромб и не прямоугольник); в) ромб (но не квадрат); г) прямоугольник (но не квадрат).

92. $x^2+(y-2)^2=4$ и $(x-4)^2+(y-2)^2=4$.

93. $(x-3)^2+(y\pm 3)^2=9$.

94. $ax+by=\frac{a^2+b^2}{2}$ (прямая).

95. а) (305; 215); б) точки пересечения нет — прямые параллельны; в) (0; 0).

96. 6 см, т. е. диаметру окружности.

97. Указание. Вершины угла, центр окружности и одна точка касания являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

98. В двух точках. Указание. Расстояние от оси y до центра окружности меньше радиуса окружности.

99. В двух точках. См. указание к предыдущей задаче.

100. а) Пересекает в двух точках; б) касается; в) не пересекает. Указание. Для вычисления расстояния от гипотенузы до центра окружности, т. е. вершины прямого угла, можно воспользоваться формулой из № 73.

101. а) Не могут; б) не могут. Указание. Симметрии относительно точки и относительно прямой являются движениями (теоремы 9.2 и 9.3).

102. а) Не могут; б) не могут. Указание. Основания трапеции различны по длине.

103. Воспользоваться свойствами движения (теорема 9.1) и признаком параллелограмма (теорема 6.1). См. также указание к дифференцированному заданию Д-11.

104. Не существует. Указание. Прямые, в которые переходят прямые a_1 и b_1, как и прямые a_1 и b_1, имеют общую точку.

105. Воспользоваться результатом задачи 104 и сохранением расстояний при движении.

106. а) Не могут; б) не могут. См. предыдущую задачу.

107. Вывести из № 74 к § 6 учебника, что $\triangle A_1B_1C_1$ симметричен $\triangle PQR$ относительно точки M.

108. Пусть $ABCD$ — искомый параллелограмм, вписанный в данный четырехугольник $LMNK$, точка O — центр симметрии параллелограмма. Данные точки B и D принадлежат соответственно MN и KL (рис. 24). Очевидно, A есть точка пересечения ML и образа отрезка NK при симметрии относительно центра O, C — пересечение NK и образа ML при симметрии с центром O.

Примечание. В этой задаче предполагается, что вершины искомого параллелограмма могут принадлежать сторонам четырехугольника или их продолжениям.

109. Центр окружности совпадает с точкой пересечения диагоналей данного прямоугольника (являющейся точкой пересечения серединных перпендикуляров к его соседним сторонам), которая служит центром его симметрии. Поэтому четвертая вершина прямоугольника тоже лежит на окружности.

110. Пусть точка O — центр окружности, AB и CD — параллельные хорды этой окружности. Прямая a, проходящая через точ-

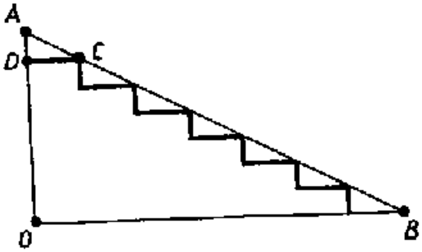


Рис. 23

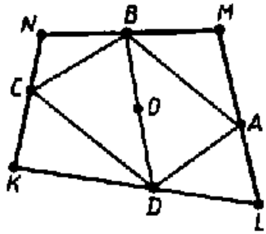


Рис. 24

ку O и перпендикулярная AB и CD, содержит высоты равнобедренных треугольников AOB и COD. Так как высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и медианой, то прямая a проходит через середины хорд AB и CD.

111. Пусть O — центр окружности F_1, O_1 — центр окружностей F_2 и F_3. И пусть окружности F_1 и F_2 пересекаются в точках A и B, а окружности F_1 и F_3 — в точках C и D. Тогда OO_1 — ось симметрии фигуры, образованной окружностями F_1, F_2 и F_3, т. е. $AB \perp OO_1$ и $CD \perp OO_1$, и, значит, $AB \parallel CD$.

112. а) Постройте любой диаметр одной окружности и перпендикулярный ему диаметр другой окружности; б) диаметр AB меньшей окружности продолжите до пересечения в точке C с большей окружностью; постройте оси симметрии отрезков AC и BC.

113. Так как углы при основании равнобокой трапеции равны (см. № 60 к § 6), то при продолжении ее боковых сторон до пересечения получается равнобедренный треугольник. Прямая l, содержащая медиану, проведенную к основанию этого треугольника, является его осью симметрии (см. № 17 к § 9). Значит, эта прямая l является осью симметрии исходной равнобокой трапеции и проходит через середины оснований и точку пересечения продолжений боковых сторон. Диагонали трапеции симметричны друг другу относительно l, поэтому их точка пересечения тоже принадлежит l (иначе диагонали пересекались бы в двух симметричных относительно l точках).

114. $\angle OBM = \angle OBN = 45°$. Поэтому точка B есть точка пересечения частей окружностей с хордами OM и ON, вмещающих углы по 45°.

115. Постройте образ одной из окружностей при повороте на угол 60° с центром в данной точке O. Точка пересечения полученной окружности и второй из данных окружностей является второй вершиной треугольника.

116. Постройте хорду окружности данной длины и окружность, концентрическую данной, проходящую через данную точку. Рассмотрите поворот вокруг общего центра окружностей, при котором данная точка переходит в точку пересечения построенных хорды и окружности.

117. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$, M, N, K, L — точки пересечения квадрата с данными прямыми (точки M, N, K и L принадлежат соответственно сторонам AB, CD, BC, AD квадрата). Тогда поворот на 90° относительно точки O переводит отрезок AB в DA. Образом точки M будет такая точка M' отрезка AD, что $\angle MOM' = 90°$, т. е. точка L. Тот же поворот на 90° относительно центра O переводит точку N в точку K. Следовательно, поворот на 90° относительно точки O переводит MN в LK, а поэтому $MN=KL$.

118. б) $E(-3;\ -5)$, $F(-3;\ -2)$, $G(-6;\ -4)$.

119. Не существует.

120. а) Не существует; б) не существует.

121. Соединим точки A' и X отрезком и найдем его середину O. Проведем прямую AO и отложим на луче, дополнительном к лучу OA, отрезок $OX'=OA$. Построенная так точка X' является искомой, так как по свойству параллельного переноса отрезки $A'X$ и AX' должны иметь общую середину (см. учебник, с. 121). Решение единственное, поскольку через точки A' и X можно провести только одну прямую, на луче $A'X$ можно отложить только один отрезок $A'O=\frac{1}{2}A'X$, через точки A и O можно провести единственную прямую и на луче, дополнительном к OA, можно отложить только один отрезок $OX'=OA$.

122. При параллельном переносе сохраняются параллельность прямых, расстояние между точками и углы между полупрямыми, т. е. параллельный перенос обладает всеми свойствами движения.

123. Так как векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ равны, то существует параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1, а точка B — в точку B_1. По свойству параллельного переноса $AA_1 \parallel BB_1$ и $AB \parallel A_1B_1$. Поэтому ABB_1A_1 — параллелограмм.

124. б) $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{BA}=\overline{CD}$, $\overline{DA}=\overline{CB}$.

125. а) $B(2;\ -3)$; б) $B(2;\ -6)$; в) $B(1;\ -3)$; г) $B(5;\ 1)$.

126. Как известно, диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. У данных параллелограммов диагональ BD общая. Поэтому две другие их диагонали AC и A_1C_1 проходят через середину M диагонали BD (рис. 25). Имеем: $\overline{AA_1}=\overline{AM}+\overline{MA_1}$, $\overline{C_1C}=\overline{C_1M}+\overline{MC}$. Но $\overline{AM}=\overline{MC}$ и $\overline{MA_1}=\overline{C_1M}$, а значит, $\overline{AA_1}=\overline{C_1C}$.

127. Из условий задачи следует, что $\overline{AM}=\overline{MB}$. Но $\overline{AM}=\overline{OM}-\overline{OA}$ и $\overline{MB}=\overline{OB}-\overline{OM}$. Тогда $\overline{OM}-\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{OM}$, отсюда $\overline{OM}=\frac{1}{2}\times(\overline{OA}+\overline{OB})$.

128. $\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{0}$, $\overline{MB}+\overline{MD}=\overline{0}$, откуда $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{0}$.

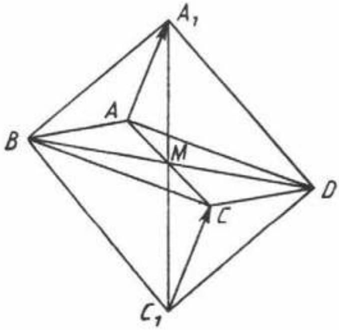


Рис. 25

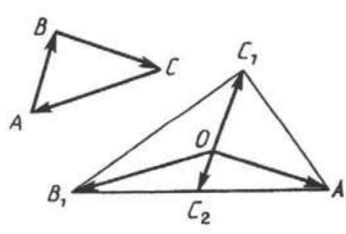


Рис. 26

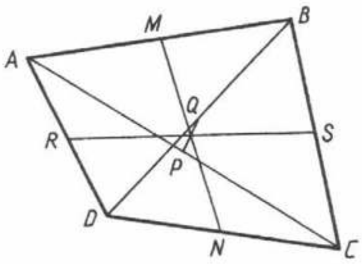


Рис. 27

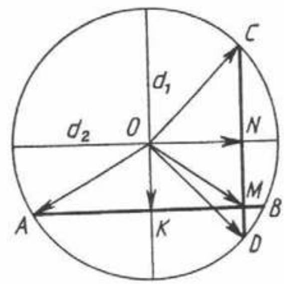


Рис. 28

129. Пусть AA_1 — медиана $\triangle ABC$. Точка M лежит на AA_1, значит, $\overline{MB}=\overline{MA_1}+\overline{A_1B}$, $\overline{MC}=\overline{MA_1}+\overline{A_1C}=\overline{MA_1}-\overline{A_1B}$ и поэтому $\overline{s}=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{MA}+2\overline{MA_1}$, т. е. вектор $\overline{s}$ лежит на прямой AA_1. Так же доказывается, что $\overline{s}$ лежит на прямой BB_1, пересекающей AA_1 в точке M. Следовательно, $\overline{s}=\overline{0}$.

130. $\overline{AA_1}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BB_1}=\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA}$, $\overline{CC_1}=\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}$. Отсюда $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\frac{3}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\overline{0}$.

131. Так как $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{0}$, а $\overline{BC}=\overline{OA_1}$, $\overline{CA}=\overline{OB_1}$, $\overline{AB}=\overline{OC_1}$, то $\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}=\overline{0}$ (рис. 26). Из равенства $\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}=\overline{0}$ следует, что $\overline{OA_1}+\overline{OB_1}=-\overline{OC_1}$. Но $\overline{OA_1}+\overline{OB_1}=2\overline{OC_2}$, где C_2 — середина A_1B_1. Тогда $2\overline{OC_2}=-\overline{OC_1}$, значит, точка O принадлежит медиане C_1C_2. Аналогично можно показать, что точка O принадлежит медианам A_1A_2 и B_1B_2 треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, точка O совпадает с точкой пересечения медиан.

132. Для данных точек A, B и C выполняется равенство $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Тогда для любой точки O плоскости запишем $\overline{OB}-\overline{OA}=2(\overline{OC}-\overline{OB})$, т. е. $\overline{OB}=\frac{1}{3}\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{OC}$.

133. Пусть точки M, N, P, Q, R и S — середины отрезков AB, CD, AC, BD, AD и BC соответственно (рис. 27). Если O — произвольная точка плоскости, то $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$, $\overline{ON}=\frac{1}{2}(\overline{OC}+\overline{OD})$. Отсюда вектор $\overline{OG_1}$, где G_1 — середина отрезка MN, равен $\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. Аналогично находим, что векторы $\overline{OG_2}$ и $\overline{OG_3}$, где G_2 и G_3 — середины отрезков PQ и RS, также равны $\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. Следовательно, точки G_1, G_2 и G_3 совпадают, а значит, отрезки PQ, MN и RS имеют общую середину.

134. Проведите два диаметра окружности d_1 и d_2, соответственно перпендикулярные хордам AB и CD (рис. 28), d_1 пересекает AB в точке K, d_2 пересекает CD в точке N. Воспользуйтесь результатом задачи 127.

135. По условию точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, т. е. середина каждой диагонали, поэтому

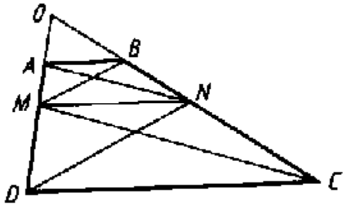


Рис. 29

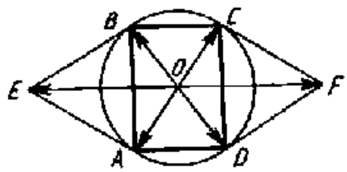


Рис. 30

$2\overline{PO}=\overline{PA}+\overline{PC}$ и $2\overline{PO}=\overline{PB}+\overline{PD}$, следовательно, $4\overline{PO}=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+$ $+\overline{PD}$.

136. $\overline{AC}=\lambda\overline{CP}$, откуда $\overline{OC}-\overline{OA}=\lambda\overline{OB}-\lambda\overline{OC}$; $\overline{OC}=\dfrac{\overline{OA}+\lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$.

137. $\overline{AA_1}=\overline{AB}+\overline{BA_1}=\overline{AB}+k\overline{BC}$, $\overline{BB_1}=\overline{BC}+\overline{CB_1}=\overline{BC}+k\overline{CA}$, $\overline{CC_1}=$ $=\overline{CA}+\overline{AC_1}=\overline{CA}+k\overline{AB}$, тогда $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=(1+k)(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$. Учитывая, что $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$, получим $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}$.

138. Докажите, что хорды AB и CD симметричны относительно прямой OM и сумма векторов, симметричных относительно прямой, лежит на этой прямой.

139. Пусть прямые DA и CB пересекаются в точке O (рис. 29), тогда $\overline{OD}=\alpha\overline{OA}$, $\overline{OC}=\alpha\overline{OB}$. По условию $AN \parallel CM$, отсюда $\overline{OM}=\beta\overline{OA}$, $\overline{OC}=\beta\overline{ON}$. Поэтому $\overline{OD}=\frac{\alpha}{\beta}\overline{OM}$, $\overline{ON}=\frac{\alpha}{\beta}\overline{OB}$, значит, $DN \parallel MB$.

140. Воспользоваться результатом задачи 139.

141. Пусть $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OE}$ и $\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{OF}$ (рис. 30). Из условия задачи следует, что $\overline{OE}=-\overline{OF}$. Значит, точки O, E и F лежат на одной прямой и $OE=OF$. Так как OE и OF являются диагоналями ромбов $OAEB$ и $OCFD$, то треугольники OAE и OCF равны (по трем сторонам). Из равенства треугольников следует равенство углов EOA и FOC. А поскольку точки O, E и F лежат на одной прямой, то отсюда следует, что и точки A, O и C лежат на одной прямой, т. е. AC — диаметр окружности. Точно так же доказывается, что BD тоже диаметр окружности. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

142. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отложим от одной точки O. Тогда параллелограмм, построенный на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$,— прямоугольник. Векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ — его диагонали. Но диагонали прямоугольника равны, поэтому $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}-\overline{b}|$.

143. Указание. Возвести обе части данного равенства в квадрат.

144. а) $\cos\alpha=-\frac{33}{65}$; б) $\cos\alpha=-\frac{13}{85}$; в) 0,8.

145. $\angle A=120°$, $\angle B=\angle C=30°$.

146. Указание. Докажите, что все стороны данного четырехугольника равны, а углы прямые или что диагонали AC и BD равны, перпендикулярны и имеют общую середину.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

К-1

Вариант 1. 1°. 13 см. 2. 5,7 см.
Вариант 2. 1°. 70°, 110°. 2. 16 см, 4 см.
Вариант 3. 1°. 9 см. 2. 4 см и 8 см.
Вариант 4. 1°. 32 см. 2. 120° и 60°, 4 см.

К-2

Вариант 1. 1°. 9 см. 2. $AC \parallel DE$. 3. 10 см, 35 см.
Вариант 2. 1°. 30 см. 2. $AM:AB=1:3$, $MB:AB=2:3$. 3. 36 см.
Вариант 3. 1°. 16 см. 2. 150°. 3. 7 см.
Вариант 4. 1°. 20 см. 2. $5a$. 3. 15 см.

К-3

Вариант 1. 1°. 10 см, 5 см. 2. $3\sqrt{3}$ см. 3. 4,8 см.
Вариант 2. 1°. 13 см. 2. 30 см, 16 см. 3. $\sqrt{c^2+a^2-b^2}$, $\sqrt{c^2+a^2-b^2}-a$.
Вариант 3. 1°. 10 см. 2. 6 дм. 3. 65 дм.
Вариант 4. 1°. 13 см. 2. 96 дм, 50 дм. 3. 60 см.

К-4

Вариант 1. 1°. $5\sqrt{3}$ см, 30°, 60°. 2. 67°22′.
Вариант 2. 1°. 3 см, 45°. 2. 12°41′.
Вариант 3. 1°. 13,6 см, 11 см. 2. $\frac{l}{\sin\alpha}$, $\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.
Вариант 4. 1°. 50°, 5,1 см, 6,1 см. 2. 3,53 см.

К-5

Вариант 1. 1°. а) (3; 4), б) 5, в) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. 2. $C(6; 8)$, 28.

Вариант 2. 1°. а) (1,5; 0), (0; 2), б) 2,5. 2. $x+1,5=0$; 12.

Вариант 3. 1°. а) (0; 6), б) $4\sqrt{5}$, в) (6; 0). 2. $y+x-6=0$, $y-x-6=0$.

Вариант 4. 1°. а) (−4; 3), б) 5, в) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$, $3y+4x+7=0$. 2. $D(-9; 4)$, $2(\sqrt{89}+\sqrt{13})$.

К-6

Вариант 1. 1°. $A_1(-3; 1)$, $B_1(-1; 2)$. 2°. Да. 3. $x'=x-4$, $y'=y+3$.
Вариант 2. 1°. $A_1(1; 0)$. 2°. Да. 3. $x'=x-2$, $y'=y-2$.
Вариант 3. 1°. $C_1(-4; -1)$, $D_1(-1; -1)$. 2°. Да. 3. $x'=x$, $y'=y-2$.
Вариант 4. 1°. $B_1(1; -2)$. 2°. Да. 3. $x'=x+2$, $y'=y+3$.

К-7

Вариант 1. 1°. $\overline{AB}(-1;\ -1)$, $\overline{CD}(1{,}25;\ -1{,}25)$. 2°. $\overline{(-2{,}25;\ 0{,}25)}$. 3°. 90°. 4. $M(-1;\ 1)$, $N(-2;\ 5)$. 5. $\overline{DN}=\overline{AN}-\overline{AD}$, $\overline{AM}=\overline{AD}+\overline{AN}$.

Вариант 2. 1°. $\overline{AC}(-1;\ 1)$, $\overline{BD}(-1;\ 0)$. 2°. $\overline{(-2;\ 1)}$. 3°. 45°. 4. $M(-2;\ 1)$, $N(-1;\ 3)$. 5. $\overline{AN}=\overline{AB}+\overline{AM}$, $\overline{BM}=\overline{AM}-\overline{AB}$.

Вариант 3. 1°. $\overline{AC}(0;\ -2)$, $\overline{AB}(-1;\ 0)$. 2°. $\overline{(-1;\ 2)}$. 3°. 90°. 4. $M(-2;\ 1)$, $N(2;\ -3)$. 5. $\overline{AN}=\overline{AM}-\overline{NM}$, $\overline{MN}=4\overline{BA}-2\overline{CA}$.

Вариант 4. 1°. $\overline{AC}(0{,}5;\ 2{,}5)$, $\overline{BD}(-5;\ -1)$. 2°. $\overline{(5{,}5;\ 3{,}5)}$. 3°. 90°. 4. $K(-1;\ 4)$. 5. $\overline{KD}=\overline{DA}-\overline{DB}$, $\overline{KA}=2\overline{DA}-\overline{DB}$.

К-8

Вариант 1. 1. 1,7 см. 2. $2\sqrt{3}$ см, 30°, $\sqrt{3}$ см.
Вариант 2. 1. 3,4 дм. 2. $6\sqrt{3}$ дм, 60°, $3\sqrt{3}$ дм.
Вариант 3. 1. 14,6 см. 2. 1 см. 3. Является квадратом.
Вариант 4. 1. 2,2 дм. 2. 30 дм. 3. Не является квадратом.

СОДЕРЖАНИЕ